



MECH-GCOMP

GUIA DO USUÁRIO

EQUACIONAMENTO UTILIZADO NO SOFTWARE MECH-GCOMP

Versão 1.13 (junho/2025)

**Autores: Eduardo A. W. de Menezes
Sandro C. Amico**



ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS	4
1. INTRODUÇÃO.....	9
2. MICRO-MECÂNICA DE FIBRAS: FIBRAS CONTÍNUAS.....	10
2.1 RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS – FIBRAS ISOTRÓPICAS, ARRANJO 1D	11
2.2 RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS – FIBRAS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICAS, ARRANJO 1D	17
2.3 SEMI-EMPÍRICO – FIBRAS ISOTRÓPICAS, ARRANJO 1D	18
2.4 SEMI-EMPÍRICO – FIBRAS ISOTRÓPICAS, ARRANJO ALEATÓRIO.....	19
2.5 MODELO ELÁSTICO – FIBRAS ISOTRÓPICAS UNIDIRECIONAIS.....	20
3. MICRO-MECÂNICA DE FIBRAS: FIBRAS DESCONTÍNUAS.....	22
3.1 FIBRAS ISOTRÓPICAS CURTAS, ARRANJO UNIDIRECIONAL	22
3.2 FIBRAS ISOTRÓPICAS CURTAS, ARRANJO ALEATÓRIO	24
4. MICRO-MECÂNICA DE FIBRAS: HÍBRIDOS	27
4.1 FIBRAS CONTÍNUAS UNIDIRECIONAIS	27
4.2 FIBRAS CURTAS UNIDIRECIONAIS	30
5. CÁLCULO DAS PROPRIEDADES EM FUNÇÃO DO ÂNGULO	32
6. MICRO-MECÂNICA DE PARTÍCULAS	33
6.1 PARTÍCULAS ESFÉRICAS.....	34
6.2 PARTÍCULAS ELIPSOIDES.....	39
6.3 PARTÍCULAS CÚBICAS	40
7. NANO-MECÂNICA	42
7.1 ARGILAS	42
7.2 CARBONO.....	45
8. MACRO-MECÂNICA DE LÂMINAS.....	49
8.1 PROPRIEDADES	49

8.2	CRITÉRIOS DE FALHA	51
<u>9.</u>	<u>MACRO-MECÂNICA DE LAMINADOS</u>	<u>69</u>
9.1	CONSTRUÇÃO DO LAMINADO.....	69
9.2	ANÁLISE DE FALHA EM LAMINADOS.....	71
<u>10.</u>	<u>VIGAS SANDUÍCHE</u>	<u>72</u>
10.1	ANÁLISE DE FLEXÃO	73
10.2	ANÁLISE DE FLAMBAGEM	85
<u>11.</u>	<u>VASOS DE PRESSÃO</u>	<u>90</u>
11.1	PROPRIEDADES DA SEÇÃO	91
11.2	PAREDES FINAS	92
11.3	PAREDES ESPESSAS	95
<u>12.</u>	<u>REFERÊNCIAS</u>	<u>97</u>

Lista de Símbolos

a	Dimensão do lado da fibra retangular paralela à direção 3 (ao longo da espessura da lâmina)
A	Área
$\mathbf{A}$	Matriz extensional
$\mathbf{ABD}$	Matriz que relaciona esforços e deformações em laminados
b	Dimensão do lado da fibra retangular paralela à direção 2 (ao longo da largura da lâmina)
$\mathbf{B}$	Matriz de acoplamento tração/flexão
c	Calor específico a pressão constante
c_f	<i>Crowding factor</i>
C_{fm}	Razão entre o teor de umidade da fibra e da matriz
d	Difusividade térmica ou distância até o centro de gravidade
D	Diâmetro do reforço
$\mathbf{D}$	Matriz de flexão
E	Módulo de elasticidade
$\langle EI \rangle_{eq}$	Rigidez equivalente à flexão
f	Termo de interação (Tsai-Wu)
F	Força
F_{cr}	Carga crítica de flambagem global
F_L	Carga crítica de flambagem local
G	Módulo de cisalhamento
G_{Ic}	Taxa de liberação de energia no primeiro modo de falha
G_{IIc}	Taxa de liberação de energia no segundo modo de falha
$\langle GA \rangle$	Rigidez equivalente ao cisalhamento
h	Altura
H	Tensor de Eshelby
I	Momento de inércia de área
I_Q	Invariantes de $\mathbf{Q}$
I_S	Invariantes de $\mathbf{S}$
IF	Índice de falha
J	Momento polar de inércia

k	Condutividade elétrica ou fator de correção de Timoshenko
K	Módulo volumétrico ou matriz de rigidez
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
K_{ce}	Fator de comprimento efetivo
l	Comprimento do reforço
L	Comprimento da viga
m	Massa
$m_{\sigma f}$	Fator de magnificação de tensões
$m_{\epsilon f}$	Fator de magnificação de deformações
M	Momento fletor
n	Coefficiente de segurança
n_D	Fator de degradação do material
N	Número de lâminas (laminados) ou platelets por pilha (nano)
p	Razão de aspecto
P	Carga ou pressão
q	Carga distribuída
Q	Esforço cortante
$\mathbf{Q}$	Matriz constitutiva (ou de rigidez)
R	Espaçamento entre fibras ou raio
$\mathbf{R}$	Matriz de Reuter
s	Espaçamento entre platelets
$\mathbf{S}$	Matriz de flexibilidade
t	Espessura
T_D	Tensor de concentração diluída de deformações
$\mathbf{T}$	Matriz de rotação
u	Deslocamento
V	Fração volumétrica
W	Densidade linear
w	Largura
x	Distância ao longo do comprimento
X	Direção paralela ao comprimento no sistema de coordenadas global
y	Coordenada longitudinal da viga
Y	Direção perpendicular (no plano) ao comprimento no sistema de coordenadas global
z	Coordenada ao longo da espessura

Z Direção perpendicular (fora do plano) ao comprimento no sistema de coordenadas global

Caracteres gregos:

α Coeficiente de expansão térmica
 β Coeficiente de expansão higroscópica
 γ Deformação cisalhante
 ΔC Razão entre o peso da umidade absorvida e o peso do compósito
 ΔT Variação de temperatura
 ε Deformação normal
 ζ Parâmetro adimensional utilizado em abordagens semi-empíricas
 η Variável auxiliar
 θ Ângulo de orientação das fibras
 κ Condutividade elétrica (micromecânica) ou curvatura (macromecânica)
 μ Permeabilidade magnética
 ν Coeficiente de Poisson
 ξ Constante dielétrica
 ρ Massa específica
 σ Tensão normal
 τ Tensão de cisalhamento
 φ Ângulo de torção ou ângulo de desalinhamento das fibras
 χ Parâmetro de não-linearidade em deformações cisalhantes
 ψ Ângulo crítico de falha em compressão
 ψ_0 Ângulo do plano de falha

Subscritos:

1 Direção paralela à orientação da fibra no sistema de coordenadas local
2 Direção perpendicular (no plano) à orientação da fibra no sistema de coordenadas local
3 Direção perpendicular (fora do plano) à orientação da fibra no sistema de coordenadas local
2D Compósito com uma de suas dimensões muito inferior às demais
3D Compósito com todas as três dimensões em mesma ordem de grandeza
 a Relativo à tensão aplicada ao material
 c Denota propriedade do reforço aglomerado

<i>C</i>	Denota propriedade relativa ao compósito
<i>cis</i>	Relativo ao cisalhamento
<i>CP</i>	Compósito primário (Matriz + Fibra 1)
<i>CS</i>	Compósito secundário (Matriz + Fibra 2)
<i>ef</i>	Propriedade efetiva
<i>f</i>	Denota propriedade relativa à fibra (micromecânica) ou face (vigas sanduíche)
<i>f1</i>	Denota propriedade relativa à Fibra 1 (compósitos híbridos)
<i>f2</i>	Denota propriedade relativa à Fibra 2 (compósitos híbridos)
<i>fle</i>	Relativo à flexão
<i>i</i>	Contador, propriedade relativa à interface ou designa parte interna
<i>is</i>	<i>in situ</i>
<i>k</i>	contador utilizado para a <i>k</i> -ésima lâmina de um laminado
<i>m</i>	Denota propriedade relativa à matriz, ou designa médio
<i>n</i>	Denota propriedade relativa à nano carga (micromecânica) ou ao núcleo (vigas sanduíche)
<i>NM</i>	Núcleo macio
<i>NR</i>	Núcleo rígido
<i>o</i>	Parte externa
<i>p</i>	Denota propriedade relativa à partícula
<i>Q</i>	Denota propriedade relativa à rigidez
<i>S</i>	Denota propriedade relativa à flexibilidade
<i>ult</i>	Utilizado para diferenciar a tensão última (ruptura) da tensão aplicada para o cálculo dos índices de falha
<i>x</i>	Direção paralela ao comprimento no sistema de coordenadas global
<i>y</i>	Direção perpendicular (no plano) ao comprimento no sistema de coordenadas global
<i>z</i>	Direção perpendicular (fora do plano) ao comprimento no sistema de coordenadas global
ε, f	instante de ruptura da fibra
ε, m	instante de ruptura da matriz

Sobrescritos:

<i>C</i>	Compressão
<i>d</i>	Desalinhamento
<i>f</i>	Flexão
<i>T</i>	Tração

* Inversa

1. Introdução

Este guia do usuário tem por objetivo informar aos usuários do software sobre os recursos proporcionados pelo MECH-Gcomp, suas funcionalidades básicas e instruções de uso para usuário iniciantes. São fornecidas as equações incorporadas ao programa nos módulos de nanomecânica, micro-mecânica e macro-mecânica, com suas respectivas referências. Desta forma, o usuário poderá facilmente verificar as equações nas referências indicadas e buscar mais detalhes sobre suas premissas, hipóteses simplificativas, limitações, ente outros. Em alguns casos, mais de um modelo é apresentado para uma determinada propriedade, cabendo ao usuário selecionar entre as opções disponíveis.

2. Micro-mecânica de fibras: Fibras contínuas

Neste módulo, trabalha-se com a hipótese de fibras longas, matriz isotrópica e fibras isotrópicas nas abordagens de resistência dos materiais, semi-empírica e modelo elástico. Os modelos se aplicam distintamente às situações de arranjo unidirecional (Figura 2.1(a-b)), aleatório (Figura 2.1(c)), como mostra a Figura 2.1, sendo as fibras consideradas sempre isotrópicas, exceto na condição apresentada na Seção 2.2, que pode ser visualizada na Figura 2.1(b), para fibras transversalmente isotrópicas. O sistema de coordenadas adotado ao longo desse guia é mostrado na Figura 2.2.

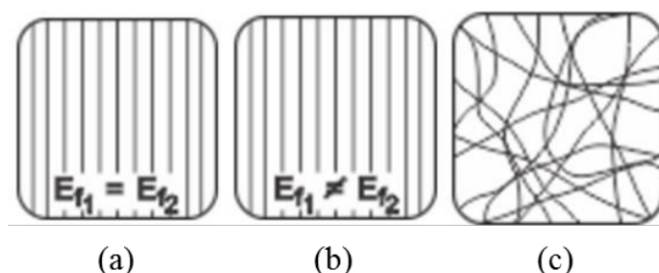


Figura 2.1 – (a) Ilustração da hipótese de fibra isotrópica (a), fibra transversalmente isotrópica (b), e fibra isotrópica de arranjo aleatório (c).

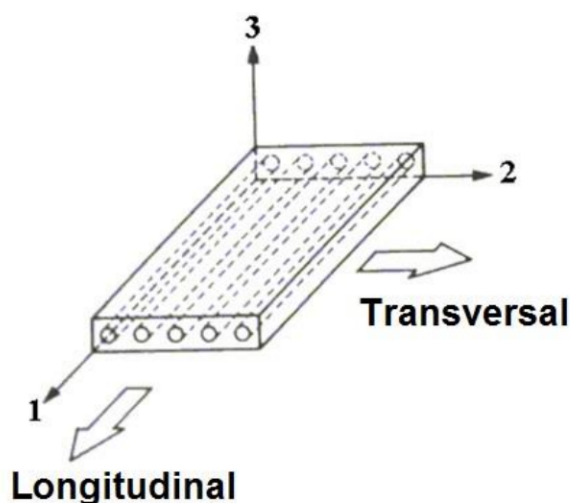


Figura 2.2 – Sistema de coordenadas de referência para as equações, onde a direção 1 é paralela à fibra e as direções 2 e 3 são perpendiculares a esta.

Para utilizar o aplicativo, primeiramente o usuário deve ir até a guia “*Micro-Fibras/Materiais*” e selecionar a fibra e matriz que deseja inserir em seu compósito, ou ainda criar um novo material. Não é possível modificar os materiais-padrão do banco de dados do programa, porém o usuário pode modificar um deles e salvá-lo com outro nome caso alguma de suas propriedades seja alterada. Não é permitido também o preenchimento desses campos com caracteres não-numéricos ou valores negativos para propriedades definidas como positivas, como módulo de elasticidade e resistência à tração, sendo exibida a advertência “Informe um número maior ou igual a zero” abaixo do campo violado, quando o usuário clica em “*Salvar*”. Tanto o valor de resistência à tração quanto compressão devem ser positivos.

Como as matrizes são usualmente consideradas isotrópicas, caso o usuário não forneça os valores de G_m ou ν_m as seguintes equações são empregadas automaticamente:

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad \text{ou} \quad \nu_m = \frac{E_m}{2G_m} - 1 \quad (1)$$

Após a seleção de fibra e matriz, o usuário deve ir à guia “*Micro-fibras/Fibras contínuas*”, inserir a fração mássica ou volumétrica de fibra (ou de matriz), selecionar a abordagem a ser utilizada e pressionar o botão “*Calcular*”. Caso o usuário não forneça todos os *inputs* solicitados na guia “*Materiais*”, algumas propriedades podem não ser calculadas, e mostrarão a advertência “*Dados Insuficientes!*” na tabela de resultados gerada após o cálculo das propriedades do compósito. Alguns modelos necessitam ainda do preenchimento de dados adicionais relativos ao compósito, localizados abaixo da seleção da abordagem. Caso haja alguma singularidade durante os cálculos de uma determinada propriedade, a tabela de resultados gerará a advertência “*Divisão por zero!*”.

Após o cálculo das propriedades, é facultada a possibilidade de exportação de uma tabela de resultados em formato *.xls* no botão “*Exportar tabela*”, além da opção de recalcular algumas propriedades considerando fibras alinhadas a um ângulo diferente de 0° , no botão “*Calcular angular*”, e ainda a exportação dos resultados para o módulo de Macro-Lâminas clicando em “*Guardar lâmina*”.

Este módulo conta também com recurso para plotar o comportamento de determinada propriedade em função do ângulo de orientação ou do volume de fibras, disponível no botão “*Gerar gráficos*”. A seguir será descrito o equacionamento e suas respectivas referências de cada uma das equações empregadas nas diferentes abordagens para o cálculo de compósitos reforçados por fibras contínuas, como apresentado na janela do aplicativo.

2.1 Resistência dos materiais – Fibras isotrópicas, arranjo 1D

As constantes de engenharia são calculadas através da Lei das misturas:

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2)$$

$$E_1 = E_{1,f} V_f + E_m V_m \quad (3)$$

$$\nu_{12} = \nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m \quad (4)$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_{1,f}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (5)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{12,f}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (6)$$

O cálculo do coeficiente de Poisson secundário é realizado por:

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (7)$$

É calculada também a razão entre a carga suportada pela fibra e pela matriz e entre a fibra e o compósito:

$$\frac{P_f}{P_m} = \frac{E_{1,f} V_f}{E_m V_m} \quad (8)$$

$$\frac{P_f}{P} = \frac{E_{1,f} / E_m}{E_{1,f} / E_m + V_m / V_f} \quad (9)$$

Para o cálculo da resistência do compósito em tração, σ_1^T , são considerados quatro casos distintos propostos por Matthews e Rawlings [1]. Os dois primeiros são mais usuais, e abrangem a situação onde a deformação máxima suportada pela fibra é inferior à da matriz. Essa análise é feita pela Lei de Hooke, assumindo elasticidade linear, ou seja:

$$\varepsilon_{1,f}^T \geq \varepsilon_m^T, \text{ onde } \varepsilon_{1,f}^T = \frac{\sigma_f^T}{E_{1,f}} \text{ e } \varepsilon_m^T = \frac{\sigma_m^T}{E_m} \quad (10)$$

Em seguida, é assumido um comportamento bilinear da resistência em função de V_f , onde a transição no comportamento ocorre quando o valor de V_f supera o volume mínimo ($V_{\text{mínimo}}$), que corresponde à fração que resulta no menor valor de σ_1^T . Além de ($V_{\text{mínimo}}$) é calculado e reportado também o valor do volume crítico ($V_{\text{crítico}}$) de fibras, que corresponde à fração volumétrica onde as fibras começam, de fato, a melhorar a resistência do compósito [2].

$$V_{\text{crítico}} = \frac{\sigma_m^T - (\sigma_m^T)_{\varepsilon,f}}{\sigma_f^T - (\sigma_m^T)_{\varepsilon,f}} \quad (11)$$

$$V_{\text{mínimo}} = \frac{\sigma_m^T - (\sigma_m^T)_{\varepsilon,f}}{\sigma_f^T + \sigma_m^T - (\sigma_m^T)_{\varepsilon,f}} \quad (12)$$

A resistência pode ser então calculada da seguinte forma:

$$\sigma_1^T = \sigma_f^T V_f + (\sigma_m^T)_{\varepsilon,f} V_m, \text{ para } V_f > V_{\text{mínimo}} \quad (13)$$

$$\sigma_1^T = \sigma_m^T V_m, \text{ para } V_f \leq V_{\text{mínimo}} \quad (14)$$

onde o valor da tensão na matriz no instante de ruptura da fibra, $(\sigma_m^T)_{\varepsilon,f}$, é informado pelo usuário em “Dados necessários”, que surge após selecionar o método de abordagem por resistência dos materiais. Caso o valor não seja informado, este é calculado por [2]:

$$(\sigma_m^T)_{\varepsilon,f} = \frac{\sigma_f^T E_m}{E_{1,f}} \quad (15)$$

Para casos menos usuais, onde a deformação de ruptura da fibra é superior à da matriz, são utilizadas as seguintes expressões:

$$V_{crítico} = 0 \quad (16)$$

$$V_{mínimo} = \frac{\sigma_m^T}{\sigma_{1,f}^T + \sigma_m^T - (\sigma_{1,f}^T)_{\varepsilon,m}} \quad (17)$$

$$\sigma_1^T = \sigma_f^T V_f, \text{ para } V_f > V_{mínimo} \quad (18)$$

$$\sigma_1^T = \sigma_m V_m + (\sigma_f^T)_{\varepsilon,m} V_f, \text{ para } V_f \leq V_{mínimo} \quad (19)$$

onde o valor de tensão na fibra no instante de ruptura da matriz, $(\sigma_{1,f}^T)_{\varepsilon,m}$, é informado pelo usuário em “Dados necessários”, que surge após selecionar o método de abordagem por resistência dos materiais. Caso o valor não seja informado, este é calculado por [2]:

$$(\sigma_f^T)_{\varepsilon,m} = \frac{\sigma_m^T E_{1,f}}{E_m} \quad (20)$$

A tensão de ruptura em tração na direção perpendicular às fibras é obtida pelo modelo empregado por Chamis [3]. Caso o usuário desconheça o valor de $E_{2,f}$, é utilizado o valor de $E_{1,f}$.

$$\sigma_2^T = \left[1 - (\sqrt{V_f} - V_f) \left(1 - \frac{E_m}{E_{2,f}} \right) \right] \sigma_m^T \quad (21)$$

Outro modelo para o cálculo dessa tensão é proposto por Kies, reportado em Lagace [4], que calcula um fator de concentração de tensões ($m_{\sigma f}$) ou de magnificação de deformações ($m_{\varepsilon f}$), para então avaliar σ_2^T , como mostram as equações abaixo.

$$m_{\sigma f} = \frac{1 - V_f \left[1 - \frac{E_m}{E_{1,f}} \right]}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \left[1 - \frac{E_m}{E_{1,f}} \right]} \quad (22)$$

$$\sigma_2^T = \frac{\sigma_m^T}{m_{\sigma f}} \quad (23)$$

$$m_{\varepsilon f} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \left[1 - \frac{E_m}{E_{1,f}} \right]} \quad (24)$$

$$\sigma_2^T = \frac{\sigma_m^T}{m_{\varepsilon f}} \quad (25)$$

Com base na máxima deformação, outro modelo é proposto por Kies, reportado por Kaw [2]:

$$\sigma_2^T = E_2 \varepsilon_2^T \quad (26)$$

onde a deformação pode ser aproximada empiricamente por:

$$\varepsilon_2^T = \varepsilon_m^T (1 - V_f^{1/3}) \quad (27)$$

No caso da resistência mecânica à compressão longitudinal, são considerados três modos de falha distintos. O primeiro, falha por compressão na fibra, é encontrado em Chamis [3]:

$$\sigma_1^C = V_f \sigma_{1,f}^C \quad (28)$$

Em relação à falha por *microbuckling*, são considerados os modelos de Chamis [3] e de Rosen, reportados por Daniel e Ishai [5], expressos nas Equações (29) e (30), respectivamente.

$$\sigma_1^C = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_{12,f}} \right)} \quad (29)$$

$$\sigma_1^C = 2V_f \left[\frac{E_m E_{1,f} V_f}{3(1 - V_f)} \right]^{1/2} \quad (30)$$

Se a falha ocorre por cisalhamento ou delaminação, os modelos de Chamis [3] e Rosen são expressos nas Equações (31) e (32).

$$\sigma_1^C = 10\tau_{12} + 2,5\sigma_m^C \quad (31)$$

$$\sigma_1^C = \frac{G_m}{1 - V_f} \quad (32)$$

A falha por compressão transversal proposta por Chamis [3] envolve $E_{2,f}$. Novamente, é utilizado o valor de $E_{1,f}$ caso o módulo elástico transversal da fibra não seja informado pelo usuário.

$$\sigma_2^c = \left[1 - (\sqrt{V_f} - V_f) \left(1 - \frac{E_m}{E_{2,f}} \right) \right] \sigma_m^c \quad (33)$$

A falha por cisalhamento no compósito também é proposta por Chamis [3].

$$\tau_{12} = \left[1 - (\sqrt{V_f} - V_f) \left(1 - \frac{G_m}{G_{12,f}} \right) \right] \tau_m \quad (34)$$

As deformações na ruptura são calculadas de forma simplificada através da Lei de Hooke para todas as resistências mostradas acima, sendo fornecidas ao usuário em percentual, à exceção do modelo de Kaw para σ_2^T , onde a deformação já foi calculada pela Eq. (29).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T &= \frac{\sigma_1^T}{E_1}; & \varepsilon_1^c &= \frac{\sigma_1^c}{E_1}; \\ \varepsilon_2^T &= \frac{\sigma_2^T}{E_2}; & \varepsilon_2^c &= \frac{\sigma_2^c}{E_2}, \text{ e} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

Com relação aos coeficientes de expansão térmica (α), são utilizados os modelos de Tsai e Hahn, reportados por Barbero [6]:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{1,f} E_{1,f} V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_{1,f} V_f + E_m V_m} \quad (36)$$

$$\alpha_2 = (1 + \nu_{12,f}) \alpha_{1,f} V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m - \alpha_1 \nu_{12} \quad (37)$$

Para o cálculo do coeficiente de expansão higroscópica (β), primeiramente consideram-se os modelos que desprezam a expansão da fibra ($\beta_{1,f} = \beta_{2,f} = 0$). Os valores apresentados para β_1 reportados por Kaw [2], segundo Tsai e Hahn, são expressos na Equação (38). Já para o cálculo de β_2 , são utilizados dois modelos, o de Tsai e Hahn [6] e o de Weeton [7], mostrados nas Equações (39) e (40), respectivamente.

$$\beta_1 = \beta_m \left(\frac{\rho}{\rho_m} \right) \frac{E_m}{E_1} \quad (38)$$

$$\beta_2 = \left[(1 + \nu_m) - \frac{E_m}{E_1} \nu_{12} \right] \frac{\rho}{\rho_m} \beta_m \quad (39)$$

$$\beta_2 = \beta_m (1 - \sqrt{V_f}) \left[1 + \frac{\sqrt{V_f} (1 - \sqrt{V_f}) E_m}{\sqrt{V_f} E_2 + (1 - \sqrt{V_f}) E_m} \right] \quad (40)$$

Para os casos nos quais a fibra também sofre expansão higroscópica, Tsai e Hahn [8] introduzem o termo C_{fm} , que é a razão do teor de umidade entre fibra e matriz, calculando o valor de β por:

$$\beta_1 = \frac{E_{1,f} C_{fm} \beta_{1,f} V_f + E_m \beta_m V_m}{(E_{1,f} V_f + E_m V_m)(\rho_m V_m + \rho_f C_{fm} V_f)} \rho \quad (41)$$

$$\beta_2 = \frac{C_{fm} \beta_{1,f} V_f (1 + \nu_{12,f}) + \beta_m V_m (1 + \nu_m)}{\rho_m V_m + \rho_f C_{fm} V_f} \rho - (\nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m) \beta_1 \quad (42)$$

O cálculo da condutividade térmica k foi proposto por Rosen e reportado em Eckold [9].

$$k_1 = k_{1,f} V_f + k_m V_m \quad (43)$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{V_f}{k_{1,f}} + \frac{V_m}{k_m} \quad (44)$$

Outra propriedade que de acordo com Chamis [3] pode ser facilmente avaliada pela lei das misturas é o calor específico, apresentado na Equação (45):

$$c = \frac{1}{\rho} (\rho_m V_m c_m + \rho_f V_f c_f) \quad (45)$$

Para o cálculo da difusividade térmica (d) é utilizado o modelo de Chamis [10]:

$$d_1 = d_m V_m ; d_2 = d_3 = d_m \sqrt{V_m} \quad (46)$$

Caso o usuário não forneça o valor de d_m este é calculado por [11]:

$$d_m = \frac{k_m}{\rho_m c_m} \quad (47)$$

As propriedades elétricas condutividade térmica (κ), permeabilidade magnética (μ) e constante dielétrica (ξ) são calculadas pela Lei das Misturas [11]:

$$\kappa_1 = \kappa_f V_f + \kappa_m V_m ; \kappa_2 = \left(\frac{V_f}{\kappa_f} + \frac{V_m}{\kappa_m} \right)^{-1} \quad (48)$$

$$\xi_1 = \xi_f V_f + \xi_m V_m ; \xi_2 = \left(\frac{V_f}{\xi_f} + \frac{V_m}{\xi_m} \right)^{-1} \quad (49)$$

$$\mu_1 = \mu_f V_f + \mu_m V_m ; \mu_2 = \left(\frac{V_f}{\mu_f} + \frac{V_m}{\mu_m} \right)^{-1} \quad (50)$$

2.2 Resistência dos materiais – Fibras transversalmente isotrópicas, arranjo 1D

Neste módulo as fibras deixam de ser consideradas isotrópicas, já que muitas delas (carbono, aramida) de fato possuem comportamento anisotrópico. A massa específica é calculada através da Lei das Misturas, como na Equação (1), porém as demais constantes elásticas são obtidas segundo Chamis [3], que considera fibras dispostas de forma quadrática.

$$E_1 = E_{1,f} V_f + E_m V_m \quad (51)$$

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{2,f}} \right)} \quad (52)$$

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{12,f}} \right)} \quad (53)$$

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{23,f}} \right)} \quad (54)$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m \quad (55)$$

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (56)$$

O módulo de elasticidade transversal também é calculado segundo o modelo de Whitney e Riley, reportada por Kaw [2].

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_{2,f}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (57)$$

O coeficiente de expansão térmica é avaliado conforme proposto por Hashin, reportado por Daniel e Ishai [5].

$$\alpha_1 = \frac{1}{E_1} (\alpha_{1,f} E_{1,f} V_f + \alpha_m E_m V_m) \quad (58)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2,f} V_f \left(1 + \nu_{12,f} \frac{\alpha_{1,f}}{\alpha_{2,f}} \right) + \alpha_m V_m (1 + \nu_m) - (\nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m) \alpha_1 \quad (59)$$

Uma alternativa para o cálculo de α_2 é apresentada por Chamis [10].

$$\alpha_2 = \alpha_{2,f} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f}) \left(1 + V_f \nu_m \frac{E_{1,f}}{E_1} \right) \alpha_m \quad (60)$$

Os coeficientes de expansão higroscópica são calculados por Daniel e Ishai [5], desprezando a contribuição da fibra.

$$\beta_1 = \frac{E_m V_m}{E_1} \beta_m \quad (61)$$

$$\beta_2 = \beta_m \frac{V_m}{E_1} \left[(1 + \nu_m) E_{1,f} V_f + (V_m - \nu_{12,f} V_f) E_m \right] \quad (62)$$

Alternativamente, β_2 é calculado também segundo o modelo de Chamis [10].

$$\beta_2 = \beta_m (1 - \sqrt{V_f}) \left[1 + \frac{\sqrt{V_f} (1 - \sqrt{V_f}) E_m}{\sqrt{V_f} E_2 + (1 - \sqrt{V_f}) E_m} \right] \quad (63)$$

2.3 Semi-empírico – Fibras isotrópicas, arranjo 1D

As equações desta abordagem foram em geral desenvolvidas a partir do ajuste de curvas com dados experimentais, sendo consideradas semi-empíricas pelo fato das variáveis envolvidas possuírem significado físico [2]. Nessa abordagem, o usuário deve também definir a geometria da seção-transversal da fibra de interesse, pois algumas propriedades são avaliadas de forma distinta para fibras circulares/quadradas e retangulares.

Os valores de E_1 , k_1 e ν_{12} continuam sendo avaliados através da Lei das Misturas. Já E_2 e G_{12} são calculados por Halpin e Tsai [12] pela introdução dos parâmetros η e ζ , onde ζ está associado à geometria da fibra, e η é função de ζ e da razão fibra/matriz da propriedade em questão, como mostram as equações a seguir. A expressão para a condutividade térmica k foi reportada por Barbero [6].

$$E_2 = E_m \left(\frac{1 + \zeta_1 \eta_1 V_f}{1 - \eta_1 V_f} \right); G_{12} = G_m \left(\frac{1 + \zeta_2 \eta_2 V_f}{1 - \eta_2 V_f} \right) \text{ e } k_2 = k_m \left(\frac{1 + \zeta_3 \eta_3 V_f}{1 - \eta_3 V_f} \right) \quad (64)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m} \right) - 1}{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m} \right) + \zeta_1}; \eta_2 = \frac{\left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \right) - 1}{\left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \right) + \zeta_2}; \eta_3 = \frac{\left(\frac{k_{1,f}}{k_m} \right) - 1}{\left(\frac{k_{1,f}}{k_m} \right) + \zeta_3} \quad (65)$$

Para fibras com seção transversal circular:

$$\zeta_1 = 2; \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \quad (66)$$

Para fibras com seção transversal retangular, sendo a a dimensão na direção 3 (ao longo da espessura, no sentido para fora do plano da lâmina) e b na direção 2 (ao longo da largura da lâmina, no sentido transversal):

$$\zeta_1 = 2\left(\frac{a}{b}\right); \zeta_2 = \zeta_3 = \exp\left[\sqrt{3} \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right] \quad (67)$$

Para valores de V_f superiores a 50%, foi observado por Hewitt e Malherbe diferenças expressivas no cálculo de G_{12} em fibras circulares. Foi então proposto um ajuste no valor de ζ , reportado em Kaw [2].

$$\zeta_2 = 1 + 40V_f^{10} \quad (68)$$

Para o cálculo de G_{23} , um modelo é proposto por Tsai e Hahn, citada por Barbero [6].

$$G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_4(1 - V_f)}{\eta_4(1 - V_f) + \frac{V_f G_m}{G_{12,f}}} \quad (69)$$

onde:

$$\eta_4 = \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{12,f}}}{4(1 - \nu_m)} \quad (70)$$

2.4 Semi-empírico – Fibras isotrópicas, arranjo aleatório

O cálculo das constantes E , G e ν foi proposto por Hull e reportados por Barbero [7].

$$E = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (71)$$

$$G = \frac{1}{8} E_1 + \frac{1}{4} E_2 \quad (72)$$

$$\nu = \left(\frac{E}{2G}\right) - 1 \quad (73)$$

O valor de E_1 , é obtido a partir da Lei das Misturas, já o valor de E_2 é obtido de duas formas distintas, pela Equação (52) e pela Equação (64) considerando fibras circulares, resultando em dois *outputs* diferentes para cada uma das Equações acima, procedimento também mencionado na coluna “Comentário”, na tabela de resultados gerada.

A resistência à tração de um compósito com fibras longas aleatórias pode ser calculada pelo modelo utilizado por Hahn, reportado por Barbero [7], através de um parâmetro η , onde as Equações (13)-(19) são utilizadas para o cálculo de $(\sigma_1^T)_{ult}$, a Equação (21) para $(\sigma_2^T)_{ult}$ e a Equação (34) para $(\tau_{12})_{ult}$.

$$\eta = \sqrt{\frac{(\sigma_1^T)_{ult} (\sigma_2^T)_{ult}}{(\tau_{12})_{ult}^2}} \quad (74)$$

No caso do valor de η ser superior a 1, utiliza-se a Equação (75), caso contrário a Equação (76).

$$\sigma^T = \frac{4}{\pi} \tau_{12} (1 + \ln \eta) \quad (75)$$

$$\sigma^T = \frac{4}{\pi} \tau_{12} \eta \quad (76)$$

Os coeficientes de expansão térmica e higroscópica são reportados por Barbero [7], onde as propriedades de um compósito unidirecional fictício são usadas como referência. Os valores de E_1 e ν_{12} são calculados pelas leis das misturas (ver Eqs. (3) e (4), respectivamente), e E_2 pela teoria de Halpin-Tsai (Eq. (64)). Já os valores de α_1 e α_2 seguem as Eqs. (58) e (59), enquanto β_1 e β_2 seguem as Eqs. (61) e (63), respectivamente. Calculadas essas propriedades, faz-se:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + (1 + 2\nu_{12})E_2} \quad (77)$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + (1 + 2\nu_{12})E_2}$$

2.5 Modelo elástico – Fibras isotrópicas unidirecionais

Este módulo contempla o equilíbrio de forças, elasticidade e aplicação da Lei de Hooke em três dimensões, uma vez que abordagens a partir de resistência dos materiais podem não satisfazer as equações de compatibilidade ou a Lei de Hooke em três dimensões [2]. As fibras são consideradas cilindros inseridos no interior de outro cilindro maior, a matriz, mantendo o teor de fibra similar. As constantes de engenharia para essa abordagem propostas por Kaw [2] são:

$$E_1 = E_{1,f} V_f + E_m V_m - \frac{2E_m E_{1,f} V_f (\nu_{12,f} - \nu_m)^2 V_m}{E_{1,f} A_1 + E_m A_2} \quad (78)$$

$$\nu_{12} = \nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m + \frac{V_f V_m (\nu_{12,f} - \nu_m) A_3}{E_{1,f} A_1 + E_m A_2} \quad (79)$$

$$G_{12} = G_m \left[\frac{G_{12,f} (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_{12,f} (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \right] \quad (80)$$

$$E_2 = 2(1 + \nu_{23}) G_{23} \quad (81)$$

$$\nu_{23} = \frac{K^* - \left(1 + 4K^* \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) G_{23}}{K^* + \left(1 + 4K^* \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) G_{23}} \quad (82)$$

$$K_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}; K_f = \frac{E_{1,f}}{2(1 + \nu_{12,f})(1 - 2\nu_{12,f})} \quad (83)$$

$$K^* = \frac{K_m(K_f + G_m)V_m + K_f(K_m + G_m)V_f}{(K_f + G_m)V_m + (K_m + G_m)V_f} \quad (84)$$

e G_{23} é obtido a partir da raiz positiva do seguinte polinômio de segundo grau:

$$A_4 \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right)^2 + 2A_5 \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right) + A_6 = 0 \quad (85)$$

onde:

$$A_1 = 2\nu_m^2 V_f - \nu_m + V_f \nu_m - V_f - 1 \quad (86)$$

$$A_2 = -1 - 2V_f \nu_{12,f}^2 + \nu_{12,f} - V_f \nu_{12,f} + 2\nu_{12,f}^2 + V_f \quad (87)$$

$$A_3 = 2E_{1,f} \nu_m^2 + \nu_m E_{1,f} - E_{1,f} + E_m - \nu_{12,f} E_m - 2E_m \nu_{12,f}^2 \quad (88)$$

$$A_4 = 3V_f (1 - V_f)^2 \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f \right) + \left[\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \left[V_f \eta_m \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) - \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m + 1 \right) \right] \quad (89)$$

$$A_5 = -3V_f (1 - V_f)^2 \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m + \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f \right) - 2 \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] + \frac{V_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) \left[\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \quad (90)$$

$$A_6 = 3V_f (1 - V_f)^2 \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f \right) + \left[\eta_m \frac{G_{12,f}}{G_m} + \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[\frac{G_{12,f}}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_{12,f}}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \quad (91)$$

$$\eta_m = 3 - 4\nu_m; \quad \eta_f = 3 - 4\nu_{12,f} \quad (92)$$

3. Micro-mecânica de fibras: Fibras descontínuas

Neste módulo as fibras são consideradas descontínuas, em uma primeira abordagem com distribuição unidirecional e outra abordagem para distribuição aleatória, como mostrado na Figura 3.1. O sistema de coordenadas adotado é o mesmo ilustrado na Figura 2.2.

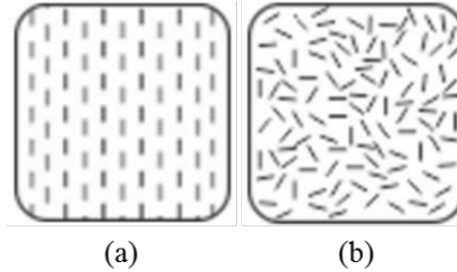


Figura 3.1 – Arranjo de fibras descontínuas: (a) Unidirecional e (b) Aleatório.

Este módulo pode ser acessado clicando na guia Micro-fibras/Fibras descontínuas, onde os *inputs* de fibra e matriz, assim como o banco de dados, é compartilhado com o módulo de fibras contínuas. Ao contrário do módulo de fibras contínuas, na tela de cálculos é necessário além da fração mássica ou volumétrica de fibra, o fornecimento de seu comprimento (l) e diâmetro (D), e para os cálculos de tensão de ruptura, é necessário ainda a tensão de descolamento na interface. Caso o usuário não forneça algum desses valores, as demais propriedades são calculadas normalmente, enquanto as que forem dependentes dele exibirão a advertência “*Dados insuficientes!*” na tabela de resultados. Se for inserido um valor para a resistência na interface superior à resistência à tração da matriz, será considerado este último no cálculo.

Os recursos de “*Guardar lâmina*”, “*Exportar tabela*” e “*Gerar gráficos*” estão disponíveis também nesse módulo. O recurso “*Calcular angular*” e a geração de gráficos em função do ângulo de orientação das fibras está disponível somente para fibras orientadas de forma unidirecional, pois para o arranjo aleatório é redundante. Como matrizes são usualmente consideradas isotrópicas, caso o usuário não forneça os valores de G_m ou de ν_m , as seguintes equações são empregadas:

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \text{ ou } \nu_m = \frac{E_m}{2G_m} - 1 \quad (93)$$

3.1 Fibras isotrópicas curtas, arranjo unidirecional

O módulo de elasticidade longitudinal é calculado de duas formas, a primeira elaborada por Cox-Krenchel [13].

$$E_1 = E_{1f} \left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\eta l}{2}\right)}{\frac{\eta l}{2}} \right) V_f + E_m V_m \quad (94)$$

onde:

$$\eta = \left(\frac{8\pi G_m}{E_{1,f} \pi D^2 \ln\left(\frac{2R}{D}\right)} \right)^{1/2} ; R = D \left(\frac{\pi}{2V_f \sqrt{3}} \right)^{1/2} \quad (95)$$

sendo R o espaçamento entre fibras, considerando aqui distribuição hexagonal.

O segundo modelo foi proposto por Halpin-Tsai, que propuseram equações semi-empíricas para o cálculo de E_1 , E_2 e G_{12} [12]:

$$E_1 = E_m \left(\frac{1 + 2\left(\frac{l}{D}\right)\eta_1 V_f}{1 - \eta_1 V_f} \right) \quad (96)$$

$$E_2 = E_m \left(\frac{1 + 2\eta_2 V_f}{1 - \eta_2 V_f} \right) \quad (97)$$

$$G_{12} = G_m \left(\frac{1 + \eta_3 V_f}{1 - \eta_3 V_f} \right) \quad (98)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m}\right) + 2\left(\frac{l}{d}\right)} ; \eta_2 = \frac{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_{1,f}}{E_m}\right) + 2} ; \eta_3 = \frac{\left(\frac{G_{12,f}}{G_m}\right) - 1}{\left(\frac{G_{12,f}}{G_m}\right) + 1} \quad (99)$$

Em relação ao coeficiente de Poisson, as mesmas expressões utilizadas para fibras longas são aplicadas [12]:

$$\nu_{12} = \nu_{12,f} V_f + \nu_m V_m \quad (100)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (101)$$

Halpin-Tsai propõem uma expressão para o limite inferior do módulo de cisalhamento (G_{12}^-) e outra para o limite superior (G_{12}^+), Equação (102), onde os termos que referenciam as propriedades da fibra e da matriz invertem de posição. De e White [14] utilizam a média desses valores para o cálculo de G_{12} .

$$G_{12}^- = G_m + \left(\frac{V_f}{\frac{1}{G_{12,f} - G_m} + \frac{V_m}{2G_m}} \right) ; G_{12}^+ = G_{12,f} + \left(\frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_{12,f}} + \frac{V_f}{2G_{12,f}}} \right) \quad (102)$$

$$G_{12} = \frac{G_{12}^+ + G_{12}^-}{2} \quad (103)$$

Para o cálculo da resistência à tração dessa classe de compósitos, o modelo proposto por Eckold [9] calcula primeiramente o comprimento crítico (l_c), para posteriormente verificar se o comprimento utilizado é ou não superior a este valor.

$$l_c = \frac{\sigma_{1,f}^T D}{2\tau_i} \quad (104)$$

onde τ_i é a tensão de cisalhamento interfacial.

O campo τ_i precisa ser preenchido em “*Dados necessários*”, e seu valor é assumido igual à tensão cisalhante da matriz caso seja fornecido um valor superior a este. Em seguida é aplicada a Equação (105) caso o comprimento da fibra seja inferior ao crítico, e a Equação (106) caso o comprimento supere o comprimento crítico. A Equação (107) é utilizada para determinar a tensão na matriz no instante de ruptura da fibra caso o campo correspondente a esse valor não tenha sido preenchido.

$$\sigma_1^T = \left(\frac{l\tau_i}{D} \right) V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon,f} V_m \quad \text{para } l < l_c \quad (105)$$

$$\sigma_1^T = \left(1 - \frac{D(\sigma_{1,f}^T)_{ult}}{4l\tau_i} \right) V_f (\sigma_{1,f}^T)_{ult} + (\sigma_m)_{\varepsilon,f} V_m \quad \text{para } l > l_c \quad (106)$$

$$(\sigma_m)_{\varepsilon,f} = \frac{\sigma_{1,f}^T E_m}{E_{1f}} \quad (107)$$

O calor específico para compósitos de fibras curtas é proposto por Chamis e reportado por Chawla [15].

$$c = \frac{1}{\rho} (\rho_f V_f c_f + \rho_m V_m c_m) \quad (108)$$

3.2 Fibras isotrópicas curtas, arranjo aleatório

Quando as fibras curtas estão dispostas aleatoriamente no interior da matriz, muitos modelos são apresentados pelo MECH-Gcomp. Isto se deve às restrições de alguns deles e à elevada discrepância que apresentam entre si. Para a determinação das constantes de engenharia do aleatório, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal precisam ser primeiramente calculados para uso das equações propostas por Wolff [16].

$$E_{2D} = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (109)$$

$$E_{3D} = \frac{1}{5} E_1 + \frac{4}{5} E_2 \quad (110)$$

$$G = \frac{1}{8} E_1 + \frac{1}{4} E_2 \quad (111)$$

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (112)$$

onde os valores de E_1 e E_2 são obtidos das Equações (96) e (97).

De forma similar, Matthews e Rawlings [1] publicaram a adaptação do modelo de Cox-Krenchel para compósitos de fibras curtas unidirecionais em arranjo aleatório:

$$E_{2D} = 0.375 E_{1,f} \left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\eta l}{2}\right)}{\frac{\eta l}{2}} \right) V_f + E_m (1 - V_f) \quad (113)$$

$$E_{3D} = 0.2 E_{1,f} \left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\eta l}{2}\right)}{\frac{\eta l}{2}} \right) V_f + E_m (1 - V_f) \quad (114)$$

onde η é calculado de acordo com a Eq. (95)

Christensen [17] também propôs um modelo para o cálculo do módulo de elasticidade, restrita a compósitos com volume de fibra inferior a 20%:

$$E_{2D} = \frac{V_f}{3} E_{1,f} + (1 + V_f) E_m; \quad E_{3D} = \frac{V_f}{6} E_{1,f} + [1 + (1 + \nu_m) V_f] E_m \quad (115)$$

Outro modelo micromecânico para essa classe de compósitos foi proposto por Manera [18], onde além da restrição de até 40% no V_f , têm-se a exigência de uma matriz com $\nu_m \approx 0,4$ e obedecendo a $2 \text{ GPa} < E_m < 4 \text{ GPa}$.

$$E_{2D} = \left(\frac{16}{45} E_{1,f} + 2 E_m \right) V_f + \frac{8}{9} E_m; \quad G_{2D} = \left(\frac{2}{15} E_{1,f} + \frac{3}{4} E_m \right) V_f + \frac{1}{3} E_m \quad (116)$$

O modelo de Pan [19], elaborado a partir de uma função densidade probabilística também foi incluído para a determinação das constantes de engenharia:

$$E_{2D} = E_{1,f} \frac{V_f}{\pi} + \left(1 - \frac{V_f}{\pi} \right) E_m; \quad E_{3D} = E_{1,f} \frac{V_f}{2\pi} + \left(1 - \frac{V_f}{2\pi} \right) E_m \quad (117)$$

$$G_{2D} = \frac{E_{2D}}{2(1 + \nu_{2D})}; \quad G_{3D} = \frac{E_{3D}}{2(1 + \nu_{3D})} \quad (118)$$

$$\nu_{2D} = \nu_{12,f} \frac{V_f}{\pi} + \left(1 - \frac{V_f}{\pi} \right) \nu_m; \quad \nu_{3D} = \nu_{12,f} \frac{V_f}{2\pi} + \left(1 - \frac{V_f}{2\pi} \right) \nu_m \quad (119)$$

Por fim é fornecido o modelo de Cox [13], que desconsidera as propriedades da matriz e calcula as constantes de engenharia da seguinte forma:

$$E_{2D} = E_{1,f} \frac{V_f}{3} ; E_{3D} = E_{1,f} \frac{V_f}{6} \quad (120)$$

$$G_{2D} = E_{1,f} \frac{V_f}{8} ; G_{3D} = E_{1,f} \frac{V_f}{15} \quad (121)$$

$$\nu_{2D} = \frac{1}{3} ; \nu_{3D} = \frac{1}{4} \quad (122)$$

O calor específico é calculado através da mesma expressão desenvolvida por Chamis e mostrada na Equação (108) para fibras curtas unidirecionais. Já a resistência mecânica à tração é calculada por Matthews e Rawlings [1]:

$$\sigma^T = 0.375\eta\sigma_{1,f}^T V_f \quad (123)$$

onde η é função da resistência do compósito em tração considerando fibras longas unidirecionais, calculada através das Equações (13)-(19), e da resistência em tração considerando fibras curtas unidirecionais, calculada através das Equações (105)-(106).

$$\eta = \frac{\left(\sigma_1^T\right)_{\text{fibras curtas}} - (\sigma_m)_{\varepsilon,f} V_m}{\left(\sigma_1^T\right)_{\text{fibras longas}} - (\sigma_m)_{\varepsilon,f} V_m} \quad (124)$$

4. Micro-mecânica de fibras: Híbridos

Nesta seção são utilizadas duas diferentes abordagens, para compósitos reforçados por fibras contínuas ou curtas, ambas unidirecionais, conforme mostra a Figura 4.1, onde a alternância entre elas é feita por meio de uma *checkbox*. Ao contrário das seções anteriores aqui é necessária a inserção de duas fibras e seus respectivos valores de fração volumétrica, onde a fração da matriz é calculada a partir da fração das fibras. Caso uma das frações possua valor igual a 0% uma advertência é gerada: “Um híbrido deve ter duas fibras”.

Outra diferença com relação aos módulos que possuíam um único reforço está na plotagem dos gráficos, onde são apresentadas duas formas distintas em função das frações volumétricas. Na primeira delas (Gráfico 1) é solicitado ao usuário que, além dos tipos de fibra, informe a fração volumétrica de matriz, para que seja gerado um gráfico com a propriedade mecânica em questão no eixo Y. Já o eixo X inicia com o compósito reforçado exclusivamente pela Fibra 2, cujo volume é reduzido gradativamente até o último ponto do gráfico, onde ele passa a ser reforçado exclusivamente pela Fibra 1. Já no Gráfico 2 é fixada uma razão entre as frações volumétricas das fibras 1 e 2 (V_{f1}/V_{f2}), e o volume de ambas é variado de 0% até que somem 100%, respeitando a proporção fixada. Para melhor visualização do efeito da hibridização duas curvas adicionais são plotadas, uma considerando o compósito reforçado apenas pela Fibra 1, e outra reforçado apenas pela Fibra 2.

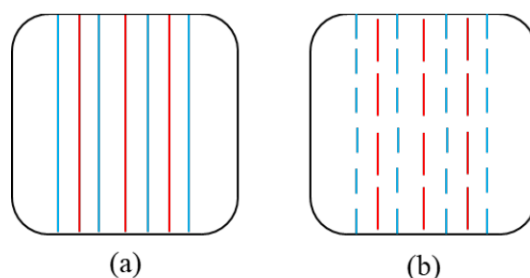


Figura 4.1 – Compósitos reforçados por duas diferentes fibras com orientação unidirecional, (a) contínuas ou (b) curtas.

4.1 Fibras contínuas unidirecionais

Dentre as possibilidades de hibridização, as três principais são mostradas na Figura 4.2.

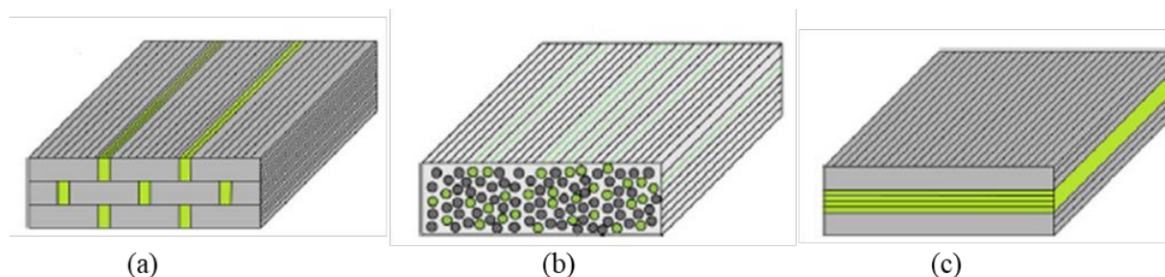


Figura 4.2 – Hibridização do tipo (a) *intraply*, (b) *intermingled*, e (c) *interlaminated*. Adaptado de [20].

O cálculo de E_1 e ν_{12} é feito através da Lei das Misturas, como em fibras contínuas unidirecionais, mostrado aqui em sua forma estendida para duas fibras, cujas propriedades são denotadas pelos subscritos $f1$ e $f2$:

$$E_1 = E_{1,f1}V_{f1} + E_{1,f2}V_{f2} + E_m V_m \quad (125)$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{12,f1}V_{f1} + \nu_{12,f2}V_{f2} + \nu_m V_m \quad (126)$$

Para o cálculo das demais constantes de engenharia Banerjee [21] propões uma extensão dos modelos semi-empíricos de Halpin-Tsai [12], onde as fibras são assumidas circulares e isotrópicas em arranjo hexagonal, assemelhando-se à hibridização do tipo *intermingled* (Figura 4.2 (b)).

$$E_2 = E_3 = E_m \left[\frac{1 + \zeta_1 (\eta_1 V_{f1} + \eta_2 V_{f2})}{1 - \eta_1 V_{f1} - \eta_2 V_{f2}} \right] \quad (127)$$

$$G_{12} = G_{13} = G_m \left[\frac{1 + \zeta_2 (\eta_3 V_{f1} + \eta_4 V_{f2})}{1 - \eta_3 V_{f1} - \eta_4 V_{f2}} \right] \quad (128)$$

$$G_{23} = G_m \left[\frac{1 + \zeta_3 (\eta_5 V_{f1} + \eta_6 V_{f2})}{1 - \eta_5 V_{f1} - \eta_6 V_{f2}} \right] \quad (129)$$

onde $\zeta_1 = 1.165$, $\zeta_2 = 1.01$ e $\zeta_3 = 0.9$ e:

$$\eta_1 = \frac{\frac{E_{1,f1}}{E_m} - 1}{\frac{E_{1,f1}}{E_m} + \zeta_1} ; \eta_3 = \frac{\frac{G_{12,f1}}{G_m} - 1}{\frac{G_{12,f1}}{G_m} + \zeta_2} ; \eta_5 = \frac{\frac{G_{12,f1}}{G_m} - 1}{\frac{G_{12,f1}}{G_m} + \zeta_3} \quad (130)$$

$$\eta_2 = \frac{\frac{E_{1,f2}}{E_m} - 1}{\frac{E_{1,f2}}{E_m} + \zeta_1} ; \eta_4 = \frac{\frac{G_{12,f2}}{G_m} - 1}{\frac{G_{12,f2}}{G_m} + \zeta_2} ; \eta_6 = \frac{\frac{G_{12,f2}}{G_m} - 1}{\frac{G_{12,f2}}{G_m} + \zeta_3} \quad (131)$$

As constantes foram determinadas também por Chamis [22], onde assume-se que a hibridização seja do tipo *intraply* (Figura 4.2(a)). O autor propõem uma divisão entre o compósito primário (CP), formado pela fibra 1 e pela matriz, e outro compósito secundário (CS), formado pela fibra 2 e matriz, onde as propriedades desses dois componentes são calculadas de acordo com as relações obtidas por Chamis [3] para compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais transversalmente isotrópicas, mostradas nas Equações (52)-(54) da Seção 2.2. Em seguida as propriedades do compósito resultante são obtidas pela Lei das Misturas, conforme mostrado abaixo:

$$E_{2,CP} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_{f,CP}} \left(1 - \frac{E_m}{E_{2,f1}} \right)}; \quad E_{2,CS} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_{f,CS}} \left(1 - \frac{E_m}{E_{2,f2}} \right)} \quad (132)$$

$$E_2 = E_3 = E_{2,CP} V_{CP} + E_{2,CS} V_{CS}$$

$$G_{12,CP} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_{f,CP}} \left(1 - \frac{G_m}{G_{12,f1}} \right)}; \quad G_{12,CS} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_{f,CS}} \left(1 - \frac{G_m}{G_{12,f2}} \right)} \quad (133)$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{12,CP} V_{CP} + G_{12,CS} V_{CS}$$

$$G_{23,CP} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_{f,CP}} \left(1 - \frac{G_m}{G_{23,f1}} \right)}; \quad G_{23,CS} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_{f,CS}} \left(1 - \frac{G_m}{G_{23,f2}} \right)} \quad (134)$$

$$G_{23} = G_{23,CP} V_{CP} + G_{23,CS} V_{CS}$$

onde tanto no modelo de Chamis quanto no de Banerjee o valor de v_{23} é calculado a partir de E_2 e G_{23} , pela relação mostrada na Equação (56).

A mesma metodologia de divisão entre CP e CS foi utilizada por Chou [23], onde as propriedades são calculadas novamente conforme Chamis [3]. Entretanto, à exceção de E_1 e v_{12} , diferentes expressões são utilizadas para o cálculo das propriedades finais, conforme mostrado abaixo:

$$E_2 = \frac{E_{2,CP}}{1 + V_{CS} \left(\frac{E_{2,CP}}{E_{2,CS}} - 1 \right)}; \quad E_3 = E_{2,CP} V_{CP} + E_{2,CS} V_{CS} \quad (135)$$

$$v_{13} = v_{13,CP} + \frac{V_{CS} (v_{13,CS} - v_{13,CP})}{(1 - V_{CS}) \frac{E_{3,CP}}{E_{3,CS}} + V_{CS}}; \quad v_{23} = v_{23,CP} V_{CP} + v_{23,CS} V_{CS} \quad (136)$$

$$G_{12} = \frac{G_{12,CP}}{1 + V_{CS} \left(\frac{G_{12,CP}}{G_{12,CS}} - 1 \right)}; \quad G_{23} = \frac{G_{23,CP}}{1 + V_{CS} \left(\frac{G_{23,CP}}{G_{23,CS}} - 1 \right)}; \quad G_{13} = G_{13,CP} V_{CP} + G_{13,CS} V_{CS} \quad (137)$$

Para hibridizações do tipo *interlaminated* (Figura 4.2 (c)), Shahzad [24] propõem uma modelagem com base nas equações semi-empíricas de Halpin-Tsai [12] para o cálculo de CP e CS, mostradas nas Equações (64)-(65) da Seção 2.3, para em seguida aplicar a Lei das Misturas. A hibridização, entretanto, deve formar um laminado simétrico para aplicação das equações.

Com relação à resistência a tração longitudinal, são considerados três modelos distintos, onde o mais conservativo deles é o de Banerjee [21], que assume que a deformação de ruptura $\varepsilon_{\min}$ será a menor entre os constituintes do compósito:

$$\sigma_1^T = E_1 \varepsilon_{\min} \quad (138)$$

Um modelo menos conservativo, que considera o efeito de sinergia entre as fibras é proposto por Chamis [22], onde o compósito é novamente dividido entre CP e CS:

$$\sigma_{1,CP}^T = V_{f,CP} \sigma_{1,f1}^T ; \sigma_{1,CS}^T = V_{f,CS} \sigma_{1,f2}^T ; \sigma_1^T = \sigma_{1,CP}^T V_{CP} + \sigma_{1,CS}^T V_{CS} \quad (139)$$

Para Avenston e Kelly [25] dois modos de falha distintos são considerados, um para volumes de fibra inferiores ao $V_{\min}$ e outro para superiores. Ao contrário dos outros modelos, há uma distinção entre a fibra 1 e fibra 2, onde a fibra 1 deve possuir a maior deformação de ruptura. Independente da escolha do usuário, o MECH-Gcomp seleciona adequadamente a fibra correta antes do cálculo através da Equação (35).

$$\sigma_1^T = \sigma_{1,f2}^T V_{f2} + \varepsilon_{1,f2}^T E_{1,f1} V_{f1}, \text{ para } V_{\min} \geq V_{f1} \quad (140)$$

$$\sigma_1^T = \sigma_{1,f1}^T V_{f1}, \text{ para } V_{\min} < V_{f1} \quad (141)$$

onde:

$$V_{\min} = \frac{\sigma_{1,f2}^T}{\sigma_{1,f1}^T + \sigma_{1,f2}^T - E_{1,f1} \varepsilon_{1,f2}^T} \quad (142)$$

Para as demais resistências são utilizadas as Equações de Chamis [3], apresentadas na Seção 2.1, aplicadas ao CP e ao CS separadamente. Em seguida é aplicada a Lei das Misturas, como mostrado na Equação (154) para a resistência à tração longitudinal, obtendo-se [22]:

$$\sigma_1^C = \sigma_{1,CP}^C V_{CP} + \sigma_{1,CS}^C V_{CS} ; \sigma_2^T = \sigma_{2,CP}^T V_{CP} + \sigma_{2,CS}^T V_{CS} ; \sigma_2^C = \sigma_{2,CP}^C V_{CP} + \sigma_{2,CS}^C V_{CS} ; \quad (143)$$

$$\tau_{12} = \tau_{12,CP} V_{CP} + \tau_{12,CS} V_{CS}$$

São também calculadas as propriedades térmicas a partir do equacionamento proposto por Chamis [10] na Seção 2.2, estendidos para híbridos aplicando-se novamente a Lei das Misturas para CP e CS [22]:

$$\alpha_1 = \alpha_{1,CP} V_{CP} + \alpha_{1,CS} V_{CS} ; \alpha_2 = \alpha_{2,CP} V_{CP} + \alpha_{2,CS} V_{CS} ; \beta_1 = \beta_{1,CP} V_{CP} + \beta_{1,CS} V_{CS} ; \quad (144)$$

$$\beta_2 = \beta_{2,CP} V_{CP} + \beta_{2,CS} V_{CS} ; k_1 = k_{1,CP} V_{CP} + k_{1,CS} V_{CS} ; k_2 = k_{2,CP} V_{CP} + k_{2,CS} V_{CS}$$

4.2 Fibras curtas unidirecionais

Para compósitos com reforços exibidos na Figura 4.1 (b) é considerado o modelo proposto por Henry [26], uma extensão do modelo de Cox-Krenchel [13] para compósitos híbridos através da divisão em CP e CS.

$$E_1 = E_{1,CP} \frac{V_{f1}}{V_{f1} + V_{f2}} + E_{1,CS} \frac{V_{f2}}{V_{f1} + V_{f2}} \quad (145)$$

onde:

$$E_{1,CP} = \frac{E_{1,f1}}{1 + \frac{2}{\eta_1 l_{f1} \tanh\left(\frac{\eta_1 l_{f1}}{2}\right)}} ; E_{1,CS} = \frac{E_{1,f2}}{1 + \frac{2}{\eta_2 l_{f2} \tanh\left(\frac{\eta_2 l_{f2}}{2}\right)}} \quad (146)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{8G_m}{t_m E_{1,f1} D_{f1}}} ; \eta_2 = \sqrt{\frac{8G_m}{t_m E_{1,f2} D_{f2}}} \quad (147)$$

$$t_m = \sqrt{\frac{1}{V_{f1} + V_{f2}} (N_{f1} D_{f1}^2 + N_{f2} D_{f2}^2) - (N_{f1} N_{f2}) (D_{f1} - D_{f2})^2 - N_{f1} D_{f1} - N_{f2} D_{f2}} \quad (148)$$

$$N_{f1} = \frac{1}{1 + \frac{V_{f2}}{V_{f1}} \left(\frac{d_{f1}}{d_{f2}} \right)^2} ; N_{f2} = \frac{1}{1 + \frac{V_{f1}}{V_{f2}} \left(\frac{d_{f2}}{d_{f1}} \right)^2} \quad (149)$$

sendo t_m a espessura da matriz entre as fibras e N a razão entre o número de fibras do tipo 1 ou 2, e o número total de fibras, de forma que $N_{f1} + N_{f2} = 1$. Para a execução desse cálculo é necessário que o usuário preencha os campos “*Dados Necessários*” com o comprimento e diâmetro das fibras 1 e 2. As demais constantes são calculadas por [26]:

$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_{f1}}{E_{2,f1}} + \frac{V_{f2}}{E_{2,f2}} + \frac{V_m}{E_m}} \quad (150)$$

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{V_{f1}}{G_{12,f1}} + \frac{V_{f2}}{G_{12,f2}} + \frac{V_m}{G_m}} \quad (151)$$

$$\nu_{12} = V_{f1} \nu_{12,f1} + V_{f2} \nu_{12,f2} + V_m \nu_m \quad (152)$$

5. Cálculo das propriedades em função do ângulo

Ao gerar a tabela de resultados para as abordagens de fibras unidirecionais, tanto longas quanto curtas, é possível ainda estimar as constantes de engenharia e a resistência à tração considerando fibras orientadas em um ângulo θ diferente de zero, o que pode ser feito clicando no botão “*Calcular angular*”, abaixo da tabela de resultados. As equações para essas propriedades são encontradas em Hyer [27], sendo estas também empregadas para a geração do gráfico das propriedades em função do ângulo no setor “*Gerar gráficos*”.

$$E_x = \left[\frac{c^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) s^2 c^2 + \frac{s^4}{E_2} \right]^{-1} \quad (153)$$

$$E_y = \left[\frac{s^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) s^2 c^2 + \frac{c^4}{E_2} \right]^{-1} \quad (154)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\nu_{12}(c^4 + s^4) - \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) c^2 s^2}{c^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) c^2 s^2 + \frac{E_1}{E_2} s^4} \quad (155)$$

$$G_{xy} = \left[2 \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) s^2 c^2 + \frac{1}{G_{12}} (s^4 + c^4) \right]^{-1} \quad (156)$$

$$\sigma_x^T = \left[\frac{1}{\frac{c^4}{(\sigma_1^T)^2} + \frac{s^4}{(\sigma_2^T)^2} + \frac{s^2 c^2}{(\tau_{12})^2}} \right]^{-1/2} \quad (157)$$

onde:

$$s = \sin(\theta) ; c = \cos(\theta) \quad (158)$$

6. Micro-mecânica de partículas

O MECH-Gcomp inclui um módulo exclusivo para materiais compósitos reforçados por partículas, dividido de acordo com a geometria do reforço, podendo ser esférica, cúbica ou elíptica, conforme ilustrado na Figura 6.1, oferecendo diferentes abordagens matemáticas para a determinação de suas propriedades. Este módulo pode ser acessado clicando em “*Micro-partículas*”, onde ao clicar na guia “*Materiais*” deve ser observado que apenas o banco de dados da matriz é compartilhado com o módulo de fibras, sendo o banco de partículas desacoplado do de fibras. Assim como nos módulos anteriores, caracteres negativos e não-numéricos não são admitidos nos *inputs*, sendo facultada também a possibilidade de salvar um material criado. Outros recursos como “*Guardar lâmina*”, “*Exportar tabela*” e “*Gerar gráficos*” em relação à fração volumétrica de partícula estão também disponíveis nesse módulo.

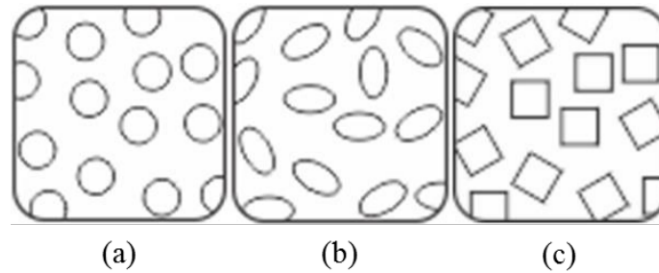


Figura 6.1 – Ilustração das três diferentes geometrias de partículas consideradas: (a) esféricas, (b) elípticas e (c) cúbicas.

Para as três geometrias de partículas, a densidade do compósito é calculada através da Lei das Misturas, como mostra a equação abaixo

$$\rho = V_p \rho_p + V_m \rho_m \quad (159)$$

O modelo de Broutman e Krock para os limites superior e inferior do módulo de elasticidade, mostradas nas Equações (160)-(161), respectivamente, também está disponível para os três casos e é reportada por Ahmed e Jones [28].

$$E = E_p V_p + E_m V_m \quad (160)$$

$$E = \frac{E_p E_m}{E_p V_m + V_p E_m} \quad (161)$$

Devido ao fato de partículas e matrizes serem usualmente consideradas isotrópicas, caso o usuário não forneça os valores de G_p , G_m , ν_p ou ν_m as seguintes equações são aplicadas para obter estas propriedades:

$$G_p = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)}; G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (162)$$

$$\nu_p = \frac{E_p}{2G_p} - 1; \nu_m = \frac{E_m}{2G_m} - 1 \quad (163)$$

Para as abordagens que necessitam do valor do módulo de elasticidade volumétrico K , seu valor é determinado para o reforço e matriz assumindo comportamento isotrópico:

$$K_p = \frac{E_p}{3-6\nu_p}; K_m = \frac{E_m}{3-6\nu_m} \quad (164)$$

6.1 Partículas esféricas

Para o cálculo das propriedades térmicas e mecânicas de compósitos reforçados por partículas esféricas é utilizado o modelo de Mital [29], que considera uma célula unitária com uma esfera em seu centro. O equacionamento é mostrado a seguir:

$$E = \frac{V_p^{0.67} E_m}{1 - V_p^{0.33} \left(1 - \frac{E_m}{E_p}\right)} + (1 - V_p^{0.67}) E_m \quad (165)$$

$$G = \frac{V_p^{0.67} G_m}{1 - V_p^{0.33} \left(1 - \frac{G_m}{G_p}\right)} + (1 - V_p^{0.67}) G_m \quad (166)$$

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (167)$$

$$\alpha = \eta_1 V_p^{0.67} \frac{\eta_2}{E} + \alpha_m \frac{E_m}{E} - \alpha_m V_p^{0.67} \frac{E_m}{E} \quad (168)$$

onde η_1 e η_2 são dados por:

$$\eta_1 = \alpha_m - V_p^{0.33} (\alpha_m - \alpha_p) \quad (169)$$

$$\eta_2 = \frac{E_m}{1 - V_p^{0.33} \left(1 - \frac{E_m}{E_p}\right)} \quad (170)$$

$$k = \frac{V_p^{0.67} k_m}{1 - V_p^{0.33} \left(1 - \frac{k_m}{k_p}\right)} + (1 - V_p^{0.67}) k_m \quad (171)$$

$$c = \frac{1}{\rho} (\rho_m V_m c_m + \rho_p V_p c_p) \quad (172)$$

Além desta, para as constantes de engenharia são empregadas as abordagens de Kerner [30], mostrada nas Equações (173)-(175), e de Pal [11], mostrada nas Equações (176)-(178), onde após serem calculados os valores de K e G , são determinados os valores de E e ν considerando o compósito isotrópico.

$$K = K_m \left[\frac{1 + \left(\frac{4G_m}{3K_m} \right) \eta_1 V_p}{1 - \eta_1 V_p} \right] \quad (173)$$

$$G = G_m \left[\frac{1 + \left(\frac{7-5\nu_m}{8-10\nu_m} \right) \eta_2 V_p}{1 - \eta_2 V_p} \right] \quad (174)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\frac{K_p}{K_m} - 1}{\frac{K_p}{K_m} + \frac{4G_m}{3K_m}} ; \eta_2 = \frac{(8-10\nu_m) \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right)}{(8-10\nu_m) \left(\frac{G_p}{G_m} \right) + (7-5\nu_m)} \quad (175)$$

$$K = K_m \left[1 + V_p \left(\frac{3K_m + 4G_m}{3K_m} \right) \left(\frac{3K_p - 3K_m}{3K_p + 4G_m} \right) \right] \quad (176)$$

$$G = G_m \left[1 + V_p \left(\frac{15(1-\nu_m)(G_p - G_m)}{2G_p(4-5\nu_m) + G_m(7-5\nu_m)} \right) \right] \quad (177)$$

$$E = \frac{9GK}{3K + G} ; \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (178)$$

Abordagens adicionais mencionadas por Ahmed e Jones [28], inicialmente elaboradas para o cálculo da viscosidade de compósitos particulados, também foram incluídas, como o modelo proposto por Einstein [31], mostrado na Equação (179), que devido a sua limitação a baixos teores de partículas foi corrigido por Mooney [32] e Guth [33] através da inserção de fatores para contemplar o ‘*crowding effect*’ em compósitos com volumes de partículas maiores. A expressão de Mooney com o fator de 1,35 reportado pelo autor, considerando células unitárias de face centrada, é mostrada na Equação (180). A expressão com polinômio de grau 2 proposta por Guth é mostrada na Equação (181), estendida para E e G [28].

$$G = G_m (1 + 2.5V_p) \quad (179)$$

$$G = G_m \exp \left(\frac{2.5V_p}{1 - 1.35V_p} \right) \quad (180)$$

$$E = E_m (1 + 2.5V_p + 14.1V_p^2) ; G = G_m (1 + 2.5V_p + 14.1V_p^2) \quad (181)$$

Já o modelo empírico elaborado por Counto [34] busca ajustar o módulo de elasticidade ao resultado de ensaios experimentais realizados em concreto, e é mostrado na Equação (182):

$$E = \left[\frac{1 - V_p^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{\frac{(1 - V_p^{1/2})}{V_p^{1/2}} E_m + E_p} \right]^{-1} \quad (182)$$

e, por último, foi incluído o modelo de três fases proposto por Christensen [17]:

$$K = K_m + \frac{V_p (K_p - K_m)}{1 + \left[\frac{(1 - V_p)(K_p - K_m)}{K_m + \frac{4}{3} G_m} \right]} \quad (183)$$

$$G = G_m \left(\frac{-\eta_5 \pm \sqrt{\eta_5^2 - \eta_4 \eta_6}}{\eta_4} \right) \quad (184)$$

$$E = \frac{9GK}{3K + G} \quad (185)$$

onde na Equação (184) é considerada apenas a raiz positiva, e as constantes η são obtidas de:

$$\eta_1 = (49 - 50\nu_p \nu_m) \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) + 35 \frac{G_p}{G_m} (\nu_p - 2\nu_m) + 35(2\nu_p - \nu_m) \quad (186)$$

$$\eta_2 = 5\nu_p \left(\frac{G_p}{G_m} - 8 \right) + 7 \left(\frac{G_p}{G_m} + 4 \right); \quad \eta_3 = \frac{G_p}{G_m} (8 - 10\nu_m) + (7 - 5\nu_m) \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \eta_4 = & 8 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (4 - 5\nu_m) \eta_1 V_p^{\frac{10}{3}} - 2 \left[63 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] V_p^{\frac{7}{3}} + 252 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 V_p^{\frac{5}{3}} \\ & - 50 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (7 - 12\nu_m + 8\nu_m^2) \eta_2 V_p + 4(7 - 10\nu_m) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} \eta_5 = & -2 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (1 - 5\nu_m) \eta_1 V_p^{\frac{10}{3}} + 2 \left[63 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] V_p^{\frac{7}{3}} - 252 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 V_p^{\frac{5}{3}} \\ & + 75 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (3 - \nu_m) \eta_2 \nu_m V_p + \frac{3}{2} (15\nu_m - 7) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \eta_6 = & 4 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (5\nu_m - 7) \eta_1 V_p^{\frac{10}{3}} - 2 \left[63 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] V_p^{\frac{7}{3}} + 252 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_2 V_p^{\frac{5}{3}} \\ & + 25 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) (\nu_m^2 - 7) \eta_2 V_p - (7 + 5\nu_m) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (190)$$

Um modelo para o cálculo da resistência à tração proposto por Nicolais e Narkis também é reportada por Ahmed e Jones [28], onde se assume que a partícula irá reduzir a resistência do compósito baseado em:

$$\sigma^T = (\sigma_m)_{ult} (1 - 1.21 V_p^{2/3}) \quad (191)$$

A condutividade elétrica k , segundo os modelos de Pal e Maxwell são calculadas, respectivamente, por:

$$k = k_m + 3k_m V_p \left(\frac{k_p - k_m}{k_p + 2k_m} \right) \quad (192)$$

$$k = k_m \left[\frac{1 + 2V_p \left(\frac{\frac{k_p}{k_m} - 1}{\frac{k_p}{k_m} + 2} \right)}{1 - V_p \left(\frac{\frac{k_p}{k_m} - 1}{\frac{k_p}{k_m} + 2} \right)} \right] \quad (193)$$

As propriedades elétricas de compósitos particulados são reportadas por Pal [11], iniciando pela condutividade elétrica κ .

$$\kappa = \kappa_m \left[1 + 3V_p \left(\frac{\kappa_p - \kappa_m}{\kappa_p + 2\kappa_m} \right) \right] \quad (194)$$

É proposto também o modelo de Maxwell:

$$\kappa = \kappa_m \left[\frac{1 + 2V_p \left(\frac{\kappa_p - 1}{\kappa_m} \right)}{1 - V_p \left(\frac{\kappa_p - 1}{\kappa_m} \right)} \right] \quad (195)$$

Pal [11] expõem as equações para a permeabilidade magnética, segundo os modelos de Rayleigh e Maxwell, respectivamente:

$$\mu = \mu_m + \mu_m \left[\frac{3V_p}{\left(\frac{\mu_p + 2\mu_m}{\mu_p - \mu_m} \right) - V_p - 1,65V_p^{\frac{10}{3}} \left(\frac{\mu_p - \mu_m}{\mu_p + 4\mu_m/3} \right)} \right] \quad (196)$$

$$\mu = \mu_m \left[\frac{1 + 2V_p \left(\frac{\mu_p - \mu_m}{\mu_p + 2\mu_m} \right)}{1 - V_p \left(\frac{\mu_p - \mu_m}{\mu_p + 2\mu_m} \right)} \right] \quad (197)$$

Por fim, a constante dielétrica ξ é expressa também pelos modelos de Rayleigh e Maxwell:

$$\xi = \xi_m + \xi_m \left[\frac{3V_p}{\left(\frac{\xi_p + 2\xi_m}{\xi_p - \xi_m} \right) - V_p - 1,65V_p^{\frac{10}{3}} \left(\frac{\xi_p - \xi_m}{\xi_p + 4\xi_m/3} \right)} \right] \quad (198)$$

$$\xi = \xi_m \left[\frac{1 + 2V_p \left(\frac{\xi_p - \xi_m}{\xi_p + 2\xi_m} \right)}{1 - V_p \left(\frac{\xi_p - \xi_m}{\xi_p + 2\xi_m} \right)} \right] \quad (199)$$

6.2 Partículas elipsoides

Para este módulo, além das propriedades definidas na aba “*Materiais*” é necessário o raio ou diâmetro da partícula, além do *crowding factor* c_f , que é a razão entre o volume ocupado pela carga e o volume real da carga, utilizado apenas no modelo de Brodnyan [35] para o cálculo de G . O valor de c_f deve se situar entre 1,0 e 2,0 [36]:

$$G = G_m \exp \left(\frac{2.5V_p + 0.407(p-1)^{1.508} V_p}{1 - c_f V_p} \right) \quad (200)$$

onde a razão de aspecto p é calculada da razão entre o comprimento e o diâmetro da partícula.

O módulo de elasticidade para partículas elipsoides foi determinado por Guth [33], na Equação (201) e por Hashin e Shtrickman [37], que propõem um limite inferior e superior para o seu valor, mostrados nas Equações (202) e (203), respectivamente.

$$E = E_m (1 + 0.67 p V_p + 1.62 p^2 V_p^2) \quad G = G_m (1 + 0.67 p V_p + 1.62 p^2 V_p^2) \quad (201)$$

$$E^{(-)} = \frac{9 \left(K_m + \frac{V_p}{\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3V_m}{3K_m + 4G_m}} \right) \left(G_m + \frac{V_p}{\frac{1}{G_p - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V_m}{5(3K_m + 4G_m)G_m}} \right)}{3 \left(K_m + \frac{V_p}{\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3V_m}{3K_m + 4G_m}} \right) + \left(G_m + \frac{V_p}{\frac{1}{G_p - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V_m}{5(3K_m + 4G_m)G_m}} \right)} \quad (202)$$

$$E^{(+)} = \frac{9 \left(K_p + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_p}} \right) \left(G_p + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_p} + \frac{6(K_p + 2G_p)V_p}{5(3K_p + 4G_p)G_p}} \right)}{3 \left(K_p + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_p}} \right) + \left(G_p + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_p} + \frac{6(K_p + 2G_p)V_p}{5(3K_p + 4G_p)G_p}} \right)} \quad (203)$$

O módulo de elasticidade é calculado também pelo modelo de Chow [38]:

$$E = E_m \left(1 + \frac{\left(\frac{K_p}{K_m} - 1 \right) \eta_1 + 2 \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) \eta_3}{2\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4} \right) \quad (204)$$

onde:

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}; K_p = \frac{E_p}{3(1-2\nu_p)} \quad (205)$$

$$\eta_1 = 1 + \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) V_m \eta_7; \quad \eta_2 = 1 + \left(\frac{G_p}{G_m} - 1 \right) V_m \eta_8; \quad \eta_3 = 1 + \left(\frac{K_p}{K_m} - 1 \right) V_m \eta_5 \quad (206)$$

$$\eta_4 = 1 + \left(\frac{K_p}{K_m} - 1 \right) V_m \eta_6; \quad \eta_5 = \frac{4\pi\eta_9}{3} - 2(2\pi - \eta_{11})\eta_{10}; \quad \eta_6 = \frac{4\pi\eta_9}{3} - 4(\eta_{11} - \pi)\eta_{10} \quad (207)$$

$$\eta_7 = \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi - 3\eta_{11}}{1-p^2} \right) \eta_9 - 4(\eta_{11} - 2\pi)\eta_{10} \quad (208)$$

$$\eta_8 = \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{(4\pi - 3\eta_{11})p^2}{1-p^2} \right) \eta_9 + (4\pi - \eta_{11})\eta_{10}$$

$$\eta_9 = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{1}{1-\nu_m} \right); \quad \eta_{10} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1-2\nu_m}{1-\nu_m} \right) \quad (209)$$

O último parâmetro, η_{11} é calculado de acordo com a Equação (210), com duas diferentes expressões em função da razão de aspecto p ;

$$\eta_{11} = \frac{2\pi p}{(p^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[p(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \cosh^{-1} p \right] \text{ para } p > 1 \quad (210)$$

$$\eta_{11} = \frac{2\pi p}{(1 - p^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\cos^{-1} p - p(1 - p^2)^{\frac{1}{2}} \right] \text{ para } p < 1$$

6.3 Partículas cúbicas

Em relação ao módulo de elasticidade, dois diferentes modelos são propostos. No de Paul [39] se considera tensão aplicada de maneira uniforme no material

$$E = E_m \left[\frac{1 + (\eta_1 - 1)V_p^{2/3}}{1 + (\eta_1 - 1)(V_p^{2/3} - V_p)} \right] \quad (211)$$

já no de Ishai e Cohen [40], ao invés da tensão é o deslocamento que é considerado uniforme no material

$$E = E_m \left(1 + \frac{V_p}{\frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} V_p^{1/3}} \right) \quad (212)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{E_p}{E_m} \quad (213)$$

Com relação à resistência mecânica sobre tração é aplicado o modelo de Nielsen [41] que desconsidera adesão entre a partícula e a matriz.

$$\sigma_1^T = 0.5 \sigma_m (1 - V_p^{2/3}) \quad (214)$$

7. Nano-mecânica

Devido a essa classe de compósitos ser relativamente recente e à dificuldade na obtenção das propriedades da nanocarga, os modelos para a determinação de suas propriedades são mais escassos que nos outros módulos. Ao contrário de fibras e partículas, não há uma guia “Materiais”, assim os *inputs* são inseridos diretamente na guia de cálculos, onde dois diferentes tipos de nanocarga são contemplados, argila e carbono, como mostrado na Figura 7.1, com uma guia específica para cada um deles. As matrizes salvas nos módulos de Partículas e Fibras são automaticamente exportadas para este módulo, não sendo permitidas edições destas aqui. Seguindo o mesmo padrão dos módulos anteriores, os *inputs* devem ser caracteres numéricos maiores ou iguais a zero, onde a advertência de “Dados insuficientes!” é exibida na tabela de resultados nas propriedades que carecem de mais *inputs*. Da mesma forma que nos módulos anteriores, a lei das misturas é aplicada para o cálculo da densidade, tanto em argilas quanto para nanocargas de carbono. Assim como no módulo de partículas, caso o usuário disponha de somente duas constantes de engenharia as demais propriedades são calculadas assumindo isotropia, tanto para a matriz quanto para a nanocarga, devendo o módulo de elasticidade ser uma dessas constantes fornecidas.

$$\rho_c = \rho_n V_n + \rho_m V_m \quad (215)$$

$$G_n = \frac{E_n}{2(1+\nu_n)}; G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (216)$$

$$\nu_n = \frac{E_n}{2G_n} - 1; \nu_m = \frac{E_m}{2G_m} - 1 \quad (217)$$

$$K_n = \frac{E_n}{3-6\nu_n}; K_m = \frac{E_m}{3-6\nu_m} \quad (218)$$

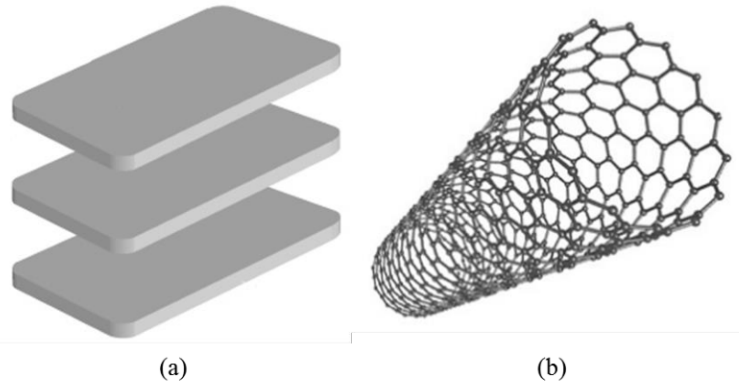


Figura 7.1 – (a) Nanocarga de argila e (b) nanocarga de carbono.

7.1 Argilas

Para o cálculo das constantes de engenharia baseadas no método de Halpin-Tsai é necessário ainda o fornecimento da razão de aspecto p (definida aqui como o diâmetro do platelet / espessura), e no caso de esfoliação incompleta (Figura 7.2), é necessário também o fornecimento da razão entre o espaçamento (s) e a espessura (t) dos platelets, e o número de platelets por pilha (N).



Figura 7.2 – (a) Nanocompósito intercalado e (b) com esfoliação completa.

Assim, segundo Brune [42], baseado no modelo de Halpin-Tsai tem-se as seguintes propriedades considerando esfoliação completa:

$$E_1 = \frac{1 + 2p\eta_1 V_n}{1 - \eta_1 V_n} E_m \quad (219)$$

$$E_2 = \frac{1 + 2p^{-1}\eta_2 V_n}{1 - \eta_2 V_n} E_m \quad (220)$$

$$G_{12} = \frac{1 + 2p^{-1.732}\eta_{12} V_n}{1 - \eta_{12} V_n} G_m \quad (221)$$

$$\nu_{12} = \nu_n V_n + \nu_m V_m \quad (222)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\frac{E_n}{E_m} - 1}{\frac{E_n}{E_m} + 2p} ; \eta_2 = \frac{\frac{E_n}{E_m} - 1}{\frac{E_n}{E_m} + 2p^{-1}} ; \eta_{12} = \frac{\left(\frac{G_n}{G_m}\right) - 1}{\left(\frac{G_n}{G_m}\right) + 2p^{-1.732}} \quad (223)$$

Para a obtenção do módulo de elasticidade considerando platelets orientados de forma aleatória o seguinte modelo é proposto por Miyagawa [43].

$$E = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (224)$$

No caso de compósitos com esfoliação incompleta, Brune [42] recalcula os parâmetros com base nos valores de N e na razão s/t .

$$N_{esfinc} = N + (1 - N) \left(\frac{s}{t} \right) \left(\frac{V_n}{1 - V_n} \right) \quad (225)$$

$$p_{esf\ inc} = \frac{p}{N_{esf\ inc}} \left[\frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{N_{esf\ inc}} \right) \frac{s}{t}} \right] \quad (226)$$

$$(V_n)_{esf\ inc} = V_n \left[1 + \left(1 - \frac{1}{N_{esf\ inc}} \right) \frac{s}{t} \right] \quad (227)$$

$$\left(\frac{E_n}{E_m} \right)_{esf\ inc} = \left(\frac{E_n}{E_m} \right) \left[\frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{N_{esf\ inc}} \right) \frac{s}{t}} \right] + \frac{\left(1 - \frac{1}{N_{esf\ inc}} \right) \frac{s}{t}}{1 + \left(1 - \frac{1}{N_{esf\ inc}} \right) \frac{s}{t}} \quad (228)$$

$$\eta_{esf\ inc} = \frac{\left(\frac{E_n}{E_m} \right)_{esf\ inc} - 1}{\left(\frac{E_n}{E_m} \right)_{esf\ inc} + 2p_{esf\ inc}} \quad (229)$$

$$E_1 = \frac{1 + 2p_{esf\ inc} \eta_{esf\ inc} (V_n)_{esf\ inc}}{1 - \eta_{esf\ inc} (V_n)_{esf\ inc}} E_m \quad (230)$$

Além do modelo de Brune [42], foram inseridos também outros dois modelos reportados por Dayma [44], ambos considerando arranjo aleatório, com reforços na forma de disco. O primeiro deles foi proposto por Hui-Shia (Equações(231)-(233)), o segundo por Takayanagi (Equação (234)).

$$E = \frac{E_m}{1 - \frac{V_n}{4} \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{3}{\eta_1 + \eta_2} \right)} \quad (231)$$

onde:

$$\eta_1 = V_n + \frac{E_m}{E_n - E_m} + 3(1 - V_n) \left[\frac{\left(1 - \frac{\pi}{2p} \right) p^{-2} - \frac{\pi}{4p}}{p^{-2} - 1} \right] \quad (232)$$

$$\eta_2 = (1 - V_n) \left[\frac{3(p^{-2} + 0.25) \frac{\pi}{2p} - 2p^{-2}}{p^{-2} - 1} \right] \quad (233)$$

$$E = E_m \left[\left(1 - \sqrt{V_n} \right) + \frac{\sqrt{V_n}}{\left(1 - \sqrt{V_n} \right) + \sqrt{V_n} \frac{E_n}{E_m}} \right]^{-1} \quad (234)$$

Outro modelo para o módulo de elasticidade proposto por Dorigato [45] inclui o efeito da interface, adicionando o parâmetro V_i , que representa a razão entre a fração volumétrica de matriz afetada pela interface e V_n . Uma expressão empírica simplificada para seu cálculo é proposta pelo autor, apresentada aqui em forma simplificada para inclusões esféricas, onde d é o diâmetro da esfera.

$$V_i = 1.14267 + \frac{0.00012078}{\rho_n d} \quad (235)$$

$$V_{n+i} = V_n (1 + V_i) \quad (236)$$

$$\eta_1 = \frac{3}{3K_n + 4G_n} ; \eta_2 = \frac{3}{3K_m + 4G_m} ; \eta_3 = \frac{6(K_n + 2G_n)}{5G_n(3K_n + 4G_n)} \quad (237)$$

$$\eta_4 = \frac{6(K_m + 2G_m)}{5G_m(3K_m + 4G_m)} ; \eta_5 = \frac{V_i}{1 + \eta_1(K_m - K_n)} ; \eta_6 = \frac{V_i}{1 + \eta_3(G_m - G_n)} \quad (238)$$

$$K = K_m + \frac{V_{n+i}(K_n - K_m)}{1 + (1 - V_{n+i})\eta_2(K_n - K_m) + \eta_5} \quad (239)$$

$$G = G_m + \frac{V_{n+i}(G_n - G_m)}{1 + (1 - V_{n+i})\eta_4(G_n - G_m) + \eta_6} \quad (240)$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (241)$$

Para o cálculo da resistência mecânica à tração é utilizado o modelo de Pukánszky, reportado por Százdi [46]

$$\sigma^T = \sigma_m^T \frac{1 - V_n}{1 + 2.5V_n} \exp(\eta V_n) \quad (242)$$

$$\eta = (1 + 6p) \ln \left(\frac{\sigma_n^T}{\sigma_m^T} \right) \quad (243)$$

7.2 Carbono

Para materiais reforçados com carbono (grafeno, SWCNT, etc.) utiliza-se o modelo de Villoria [47], onde primeiramente as propriedades do compósito são calculadas considerando o reforço alinhado, em seguida as propriedades da nanocarga são recalculadas considerando sua aglomeração no interior do compósito, representadas pelo subscrito c , para então a partir do tensor de concentração diluída de deformações, avaliar as propriedades finais do compósito, assumindo reforços esféricos suficientemente distantes.

$$E_1 = V_n E_n + (1 - V_n) E_m + 4V_n (1 - V_n) \left[\frac{(\nu_n - \nu_m)^2}{\frac{(1 - V_n)G_m}{K_n + \frac{G_n}{3}} + \frac{V_n G_m}{K_m + \frac{G_m}{3}} + 1} \right] \quad (244)$$

$$\nu_{12} = V_n \nu_n + (1 - V_n) \nu_m + \frac{V_n (1 - V_n) (\nu_n - \nu_m) \left(\frac{G_m}{K_m + \frac{G_m}{3}} - \frac{G_m}{K_n + \frac{G_n}{3}} \right)}{\frac{(1 - V_n)G_m}{K_n + \frac{G_n}{3}} + \frac{V_n G_m}{K_m + \frac{G_m}{3}} + 1} \quad (245)$$

$$K_{23} = K_m + \frac{G_m}{3} + \frac{V_n}{\frac{1}{K_n - K_m \frac{G_n - G_m}{3}} + \frac{1 - V_n}{K_m + 4 \frac{G_m}{3}}} \quad (246)$$

$$G_{12} = \frac{G_m [G_n (1 + V_n) + G_m (1 - V_n)]}{G_n (1 - V_n) + G_m (1 + V_n)} \quad (247)$$

$$G_{23} = G_m \left[1 + \frac{V_n}{\frac{G_m}{G_n - G_m} + \frac{\left(K_m + \frac{7G_m}{3} \right) (1 - V_n)}{2 \left(K_m + 4 \frac{G_m}{3} \right)}} \right] \quad (248)$$

$$E_c = \frac{[E_1 + 4(1 + \nu_{12})^2 K_{23}] [E_1 + (1 - 2\nu_{12})^2 K_{23} + 6(G_{12} + G_{23})]}{3[2E_1 + (8\nu_{12}^2 + 12\nu_{12} + 7)K_{23} + 2(G_{12} + G_{23})]} \quad (249)$$

$$\nu_c = \frac{E_1 + 2(2\nu_{12}^2 + 8\nu_{12} + 3)K_{23} - 4(G_{12} + G_{23})}{2[2E_1 + (8\nu_{12}^2 + 12\nu_{12} + 7)K_{23} + 2(G_{12} + G_{23})]} \quad (250)$$

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} ; K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)} \quad (251)$$

$$K = K_m + \frac{(K_c - K_m)V_n}{1 + \frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4G_m}{3}}} ; G = G_m \left[1 - \frac{15(1 - \nu_m) \left(1 - \frac{G_c}{G_m} \right) V_n}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m) \frac{G_c}{G_m}} \right] \quad (252)$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G} ; \nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (253)$$

Para o cálculo de compósitos com nanocargas dispostas de forma unidirecional é adotado o modelo de Dunn, reportado por Arash [48], que inclui as propriedades da interface, representada pelo subscrito i , e assim como Villoria [47], adota o tensor de concentração diluída de deformações (T_D), obtido a partir do tensor de Eshelby (H).

$$H = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left[1 - 2\nu_m + \frac{3p^2 - 1}{p^2 - 1} - \left(1 - 2\nu_m + \frac{3p^2}{p^2 - 1} \right) \eta \right] \quad (254)$$

$$\eta = \frac{p}{(p^2 - 1)^{3/2}} (p\sqrt{p^2 - 1} - \cosh^{-1} p) \quad (255)$$

$$T_{D,n} = 1 - \frac{H}{H + \frac{E_m}{E_n - E_m}} \quad (256)$$

$$T_{D,n,i} = 1 - H \left[\frac{V_n}{V_n + V_i} \left(H + \frac{E_m}{E_n - E_m} \right)^{-1} + \frac{V_i}{V_n + V_i} \left(H + \frac{E_m}{E_i - E_m} \right)^{-1} \right] \quad (257)$$

$$E_1 = E_m + \frac{(V_n + V_i)(E_i - E_m)T_{D,n,i} + V_n(E_n - E_i)T_{D,n}}{V_m + (V_n + V_i)T_{D,n,i}} \quad (258)$$

Para reforços distribuídos aleatoriamente é considerada o modelo de Sun [49], que baseado no modelo de Halpin-Tsai abrange compósitos com geometria em 2D e 3D.

$$E_{2D} = \frac{1 + 2p\eta_1 V_n}{1 - \eta_1 V_n} E_m \quad (259)$$

$$E_{3D} = \frac{1 + 2p\eta_2 V_n}{1 - \eta_2 V_n} E_m \quad (260)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\frac{E_n}{E_m} - 3}{\frac{E_n}{E_m} + 6p} ; \eta_2 = \frac{\frac{E_n}{E_m} - 6}{\frac{E_n}{E_m} + 12p} \quad (261)$$

8. Macro-mecânica de Lâminas

Neste módulo o usuário pode escolher dentre as lâminas presentes no banco de dados, criar uma nova lâmina inserindo suas propriedades ou ainda importar as propriedades calculadas nos módulos da micro-mecânica, clicando no botão “*Guardar lâmina*” logo abaixo da tabela calculada com as propriedades. Caso as deformações de ruptura não sejam fornecidas estas serão calculadas a partir das tensões de ruptura e constantes de engenharia.

8.1 Propriedades

Neste módulo o usuário deve escolher a lâmina e o ângulo θ de orientação das fibras. Os cálculos da presente seção foram baseados em Kaw [2]. A matriz de flexibilidade $\mathbf{S}$ é calculada através das constantes de engenharia da lâmina, e a de rigidez $\mathbf{Q}$ tomando sua inversa:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \quad (262)$$

que de forma simplificada para 2D podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \text{ onde } \nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{E_1} \quad (263)$$

Para transformar essas matrizes de um sistema de coordenadas local para um global, através de uma rotação θ , utilizam-se as matrizes de rotação $\mathbf{T}$ e a matriz de Reuter $\mathbf{R}$, mostradas na Equação (354). A partir delas calculam-se as matrizes de flexibilidade e rigidez no sistema global, denotadas por $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{S}}$, respectivamente.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (264)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que de forma simplificada para 2D podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (265)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{R}^{-1}; \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^T\mathbf{S}\mathbf{T} \quad (266)$$

As constantes de engenharia podem ser calculadas pela mesma metodologia descrita na Seção 5. Já as invariantes de $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{S}$, I_Q e I_S , respectivamente, são calculadas por [2] [50]:

$$\begin{aligned} I_{Q1} &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ I_{Q2} &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \\ I_{Q3} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \end{aligned} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} I_{Q4} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ I_{Q5} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ I_{S1} &= \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}) \\ I_{S2} &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ I_{S3} &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \\ I_{S4} &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{66}) \end{aligned} \quad (268)$$

8.2 Critérios de falha

Nesta seção o objetivo principal é a análise de uma lâmina através de um dos 13 critérios de falha disponíveis no MECH-Gcomp. Primeiramente o usuário deve informar qual a lâmina, para então fornecer o ângulo de orientação θ de suas fibras. Em seguida faz-se necessário aplicar o carregamento na lâmina, o que pode ser feito (em coordenadas globais) através de tensões (σ_x , σ_y , τ_{xy}), deformações (ε_x , ε_y , γ_{xy}), ou ainda cargas e momentos (F_x , F_y , F_{xy} , M_x , M_y , M_{xy}), sendo neste último caso necessário ainda a espessura t da lâmina.

Tendo em vista que os critérios de falha demandam por tensões ou deformações atuantes em coordenadas locais, é necessário realizar as devidas transformações nos dados de entrada. Para a conversão das tensões globais em locais, ou deformações globais em locais:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (269)$$

Para a conversão de tensões locais para deformações locais, ou vice-versa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (270)$$

Por último, para a conversão de cargas e momentos em tensões faz-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F_x}{t} + \frac{6M_x}{t^2} \\ \sigma_y &= \frac{F_y}{t} + \frac{6M_y}{t^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{F_{xy}}{t} + \frac{6M_{xy}}{t^2} \end{aligned} \quad (271)$$

Juntamente com o carregamento mecânico podem ser inseridos os efeitos higroscópicos, bastando para isso marcar o *checkbox* “Incluir efeitos higroscópicos”, mostrado na Figura 8.1, e informar a variação de temperatura (ΔT) e a razão entre a o peso da umidade absorvida e o peso da lâmina (ΔC). A partir desses valores a tensão e deformação local podem ser recalculadas da seguinte forma [2]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} - \Delta T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \Delta C \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (272)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \Delta C \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (273)$$

Após selecionar o critério de falha desejado e pressionar o botão “Calcular”, são então fornecidas seis tabelas de resultados. A primeira delas contém o índice de falha IF e o

coeficiente de segurança n para todos os modos de falha do critério selecionado, onde $n = 1 / IF$. É incluída também uma breve descrição para a distinção dos modos de falha calculados na coluna “Comentário”.

Já a segunda tabela calcula as tensões limite (individualmente) a que a lâmina em questão pode ser submetida até sua ruptura, utilizando o critério de falha selecionado. É importante salientar que os valores dessa tabela desconsideram a carga informada pelo usuário, bem como o carregamento higrotérmico. Na prática, um incremento de tensão é aplicado até que seja detectada a falha da lâmina ($IF = 1$). O valor de tensão que gerou a falha é reportado nessa tabela, sendo ele calculado para tração e compressão em X , tração e compressão em Y , e cisalhamento. Para os critérios que possuem diversos modos de falha, apenas o valor associado ao modo que gerou o maior IF é informado. Este incremento é calculado como sendo 1% do valor de resistência mais baixo do material em uso. Caso seja selecionada a *checkbox* “Refinar cálculo da tensão limite” (ver Figura 8.1) este incremento é reduzido para 0.1%. É possível ainda plotar o valor da tensão limite, em compressão e tração, suportada pela lâmina entre 0° e 90° . Um exemplo desse gráfico é mostrado na Figura 8.2.

As demais tabelas reportam tensões e deformações em coordenadas globais e locais, calculadas a partir da Eqs. (269) e (270). Estes valores são mostrados já contabilizando o efeito higrotérmico, sendo utilizados diretamente para o cálculo do IF .

Início

Nano ▾

Micro - Partículas ▾

Micro - Fibras ▾

Macro - Lâminas ▾

Macro - Laminados ▾

Vigas sanduíche ▾

Outros ▾

Sobre ▾

Lâminas

Propriedades

Critérios de falha

Envelopes de falha

Macro - Lâminas / Critérios de falha

Lâmina

Vidro-E/Epóxi ▾

Ângulo de orientação do reforço [°] 30

Cargas/deformações atuantes

☒ Tensão

☐ Deformação

☐ Forças e momentos

Tensões globais

Tensão longitudinal [Pa] 1e8

Tensão transversal [Pa] -2e7

Tensão cisalhante [Pa] 0

Critérios de falha

Máxima tensão ▾

☒ Incluir efeitos higrotérmicos

ΔT [°C] 200

ΔC 30

☐ Refinar cálculo das tensões limite (maior custo computacional)

☒ Incluir gráfico de Tensão Limite vs. Ângulo (maior custo computacional)

Calcular

Coeficiente de segurança	Índice de falha	Comentário
1.752	0.571	Compressão longitudinal
0.195	5.136	Compressão transversal
1.327	0.754	Cisalhamento

Tensão Limite *	Comentário
1.593e+08	Tração em X
-1.593e+08	Compressão em X
6.469e+07	Tração em Y
-1.593e+08	Compressão em Y
-5.600e+07	Cisalhamento no plano XY

* Tensão que gera $IF = 1$, considerando apenas a carga mecânica especificada

Tensões globais		
σ_x [Pa]	σ_y [Pa]	τ_{xy} [Pa]
-3.977e+08	-6.646e+08	1.273e+08

Deformações globais		
ϵ_x [%]	ϵ_y [%]	γ_{xy} [%]
-1.224e+00	-4.608e+00	3.977e+00

Tensões locais		
σ_1 [Pa]	σ_2 [Pa]	τ_{12} [Pa]
-3.542e+08	-7.081e+08	-5.196e+07

Deformações locais		
ϵ_1 [%]	ϵ_2 [%]	γ_{12} [%]
-3.479e-01	-5.484e+00	-9.420e-01

Figura 8.1 – Interface do módulo “Critérios de falha”.

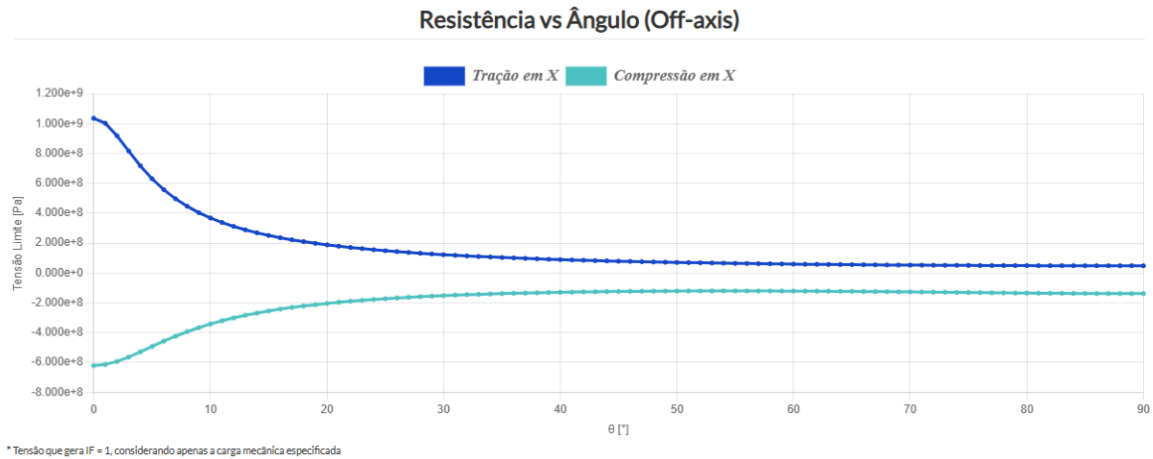


Figura 8.2 – Resistência da lâmina selecionada entre 0° e 90°.

A seguir é apresentada a metodologia adotada pelo presente software para o cálculo dos índices de falha de cada um de seus 17 critérios, onde o texto entre parênteses ao lado de cada equação para o cálculo do IF indica o texto exibido pelo software na coluna “Comentário”. Embora alguns dos critérios sejam apresentados na forma tridimensional, a tensão fora do plano (σ_3) é assumida como sendo nula neste módulo. Posteriormente, no módulo de vasos de pressão (Seção 11.3) serão analisados casos onde $\sigma_3 \neq 0$. A ordem de apresentação começa pela Máxima Tensão, Máxima Deformação e posteriormente em ordem alfabética.

8.2.1 Máxima Tensão

Este critério é relativamente simples, e engloba três diferentes modos de falha [2]:

Modo 1:

Calculadas as tensões locais, avalia-se se a tensão longitudinal é trativa ou compressiva, se $\sigma_1 > 0$:

$$IF = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \quad (\text{tração longitudinal}) \quad (274)$$

caso contrário:

$$IF = \frac{|\sigma_1|}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (\text{compressão longitudinal}) \quad (275)$$

Modo 2:

Calculadas as tensões locais, avalia-se se a tensão transversal é trativa ou compressiva, se $\sigma_2 > 0$:

$$IF = \frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \quad (\text{tração transversal}) \quad (276)$$

caso contrário:

$$IF = \frac{|\sigma_2|}{(\sigma_2^c)_{ult}} \text{ (compressão transversal)} \quad (277)$$

Modo 3:

$$IF = \frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \text{ (cisalhamento)} \quad (278)$$

8.2.2 Máxima Deformação

Semelhante ao critério anterior, com o diferencial de comparar as deformações de ruptura, e não tensões [2].

Modo 1:

Calculadas as tensões locais, avalia-se se a tensão longitudinal é trativa ou compressiva, se $\varepsilon_1 > 0$:

$$IF = \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1^T)_{ult}} \text{ (tração longitudinal)} \quad (279)$$

caso contrário:

$$IF = \frac{|\varepsilon_1|}{(\varepsilon_1^c)_{ult}} \text{ (compressão longitudinal)} \quad (280)$$

Modo 2:

Calculadas as tensões locais, avalia-se se a tensão transversal é trativa ou compressiva, se $\varepsilon_2 > 0$:

$$IF = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2^T)_{ult}} \text{ (tração transversal)} \quad (281)$$

caso contrário:

$$IF = \frac{|\varepsilon_2|}{(\varepsilon_2^c)_{ult}} \text{ (compressão transversal)} \quad (282)$$

Modo 3:

$$IF = \frac{\gamma_{12}}{(\gamma_{12})_{ult}} \text{ (cisalhamento)} \quad (283)$$

8.2.3 Azzi-Tsai

Os critérios de falha polinomiais consideram a interação entre diferentes tensões. Os principais critérios desse tipo são reportados por Camanho [51]. O primeiro deles é o de Azzi-Tsai [52], baseado no princípio da mínima energia de distorção de Von Mises:

$$IF = \eta_4 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \eta_5 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \eta_6 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (284)$$

$$2\eta_4 = \frac{1}{\eta_2^2} + \frac{1}{\eta_3^2} - \frac{1}{\eta_1^2}; 2\eta_5 = \frac{1}{\eta_1^2} + \frac{1}{\eta_3^2} - \frac{1}{\eta_2^2}; 2\eta_6 = \frac{1}{\eta_2^2} + \frac{1}{\eta_1^2} - \frac{1}{\eta_3^2}$$

onde, para $\sigma_1 > 0$, $\eta_1 = (\sigma_1^T)_{ult}$, caso contrário $\eta_1 = (\sigma_1^C)_{ult}$. Analogamente, para $\sigma_2 > 0$ $\eta_2 = (\sigma_2^T)_{ult}$ e, caso contrário, $\eta_2 = (\sigma_2^C)_{ult}$. Para $\sigma_3 > 0$ $\eta_3 = (\sigma_3^T)_{ult}$ e, caso contrário, $\eta_3 = (\sigma_3^C)_{ult}$.

8.2.4 Chang-Chang

Este critério considera dois possíveis modos de falha: falha na matriz e falha na fibra. Faz uso de um parâmetro adicional χ para contabilizar a relação não-linear entre tensão e deformação cisalhante, a ser informado pelo usuário. O valor de $7,21 \times 10^{-27} \text{ Pa}^{-3}$ para carbono/epóxi determinado por Hahn e Tsai [53] é usado como padrão pelo software. O critério foi validado pelos autores através de simulações numéricas em lâminas com furo central [54]. Embora inicialmente tenha sido proposto apenas para os modos de tração, sua extensão para os modos de compressão, tanto na fibra quanto para matriz, foi incorporada no MECH-Gcomp [55].

Modo 1:

Caso $\sigma_2 > 0$,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right)^2 + \frac{\frac{\tau_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12}^4}{\frac{\tau_{12, is}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12, is}^4}} \quad (\text{tração na matriz}) \quad (285)$$

caso contrário,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^C)_{ult}} \right)^2 + \frac{\frac{\tau_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12}^4}{\frac{\tau_{12, is}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12, is}^4}} \quad (\text{compressão na matriz}) \quad (286)$$

Modo 2:

Caso $\sigma_1 > 0$,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right)^2 + \frac{\frac{\tau_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12}^4}{\frac{\tau_{12, is}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12, is}^4}} \quad (\text{falha na interface ou fibra}) \quad (287)$$

caso contrário,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^C)_{ult}}\right)^2 + \frac{\frac{\tau_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12}^4}{\frac{\tau_{12, is}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\chi\tau_{12, is}^4}} \quad (\text{falha na interface ou fibra}) \quad (288)$$

onde o valor da resistência ao cisalhamento *in situ* também deve ser informado pelo usuário. Caso ele não forneça valor algum, a seguinte expressão é utilizada [56]:

$$\tau_{12, is} = \sqrt{2}(\tau_{12})_{ult} \quad (289)$$

8.2.5 Christensen

Também é dividido em dois modos de falha, um para a fibra e outro para a matriz [57].

Modo 1: (falha na fibra):

$$IF = \left(\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}}\right)\sigma_1 + \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (290)$$

Modo 2: (falha na matriz)

$$IF = \left(\frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}}\right)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{(\tau_{12}^2)_{ult}} - \frac{\sigma_2\sigma_3}{(\tau_{23})_{ult}} \quad (291)$$

Neste módulo o valor do *IF* é indiferente ao valor de $(\tau_{23})_{ult}$, já que $\sigma_3 = 0$. Caso contrário (módulo de vasos de pressão, paredes espessas), o valor da resistência ao cisalhamento fora do plano, quando não informado, é aproximado por [56]:

$$\tau_{12, is} = \sqrt{2}(\tau_{12})_{ult} \quad (292)$$

devendo este obedecer a restrição de [57]:

$$(\tau_{23})_{ult}^2 \geq \frac{1}{4}(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult} \quad (293)$$

8.2.6 Cuntze

Critério baseado nos invariantes, classifica um total de cinco modos de falha fisicamente distintos [58, 59]. A implementação desse critério faz uso de dois parâmetros adicionais, obtidos através do envelope de falha de $\sigma_2 \times \tau_{12}$ na região de compressão (η_1), e o outro associado ao ângulo de fratura em compressão axial (η_2). Embora previsões conservativas para esses parâmetros sejam inseridas por padrão ($\eta_1 = 0,1$ e $\eta_2=1,0$) [59], o usuário pode modificá-los dentro da faixa estipulada pelos autores.

Modo 1 (tração na fibra), para $\sigma_1 \geq 0$:

$$IF = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \quad (294)$$

Modo 2 (compressão na fibra), para $\sigma_1 < 0$:

$$IF = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (295)$$

Modo 3 (tração na matriz):

$$IF = \frac{(\eta_3 + \sqrt{\eta_5})}{2(\sigma_2^T)_{ult}} \quad (296)$$

Modo 4 (compressão na matriz):

$$IF = \frac{(\eta_2 - 1)\eta_3}{(\sigma_2^C)_{ult}} + \frac{\eta_2\sqrt{\eta_4}}{(\sigma_2^C)_{ult}} \quad (297)$$

Modo 5 (cisalhamento na matriz):

$$IF = \sqrt{\frac{[\eta_1^2\eta_5 + 4(\tau_{12})_{ult}^2\tau_{12}^2 + \eta_1\eta_5]}{2(\tau_{12})_{ult}^3}} \quad (298)$$

onde:

$$\eta_3 = \sigma_2 + \sigma_3; \eta_4 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2; \eta_5 = 2\sigma_2\tau_{12}^2 \quad (299)$$

Por fim, um sexto modo é calculado um quinto modo de falha que busca contabilizar a interação entre os diferentes modos, através do termo η_6 , onde o valor padrão de 2,5 adotado pelo software pode ser modificado pelo usuário.

Modo 6 (modo de falha efetivo):

$$IF = \left(\sum IF^{\eta_6} \right)^{1/\eta_6} \quad (300)$$

8.2.7 Hashin

Critério de polinômios quadráticos, separando modos de falha dominados pela fibra e pela matriz, sendo um dos critérios mais utilizados para predição de falha em compósitos, juntamente com os critérios de Tsai-Wu, Máxima Tensão e Máxima Deformação [51]. Baseia-se nos seguintes modos de falha [60]:

Modo 1, tração na fibra:

Se $\sigma_1 > 0$,

$$IF = \left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (301)$$

caso contrário, compressão na fibra,

$$IF = \frac{|\sigma_1|}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (302)$$

Modo 2:

Se $\sigma_2 > 0$, tração na matriz:

$$IF = \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 - \left[\frac{\sigma_2 \sigma_3}{(\tau_{23})_{ult}^2} \right] + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (303)$$

caso contrário, compressão na matriz:

$$IF = \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{4(\tau_{23})_{ult}} \right]^2 - \left[\frac{\sigma_2 \sigma_3}{(\tau_{23})_{ult}^2} \right]^2 + \left[\left(\frac{(\sigma_2^C)_{ult}}{2(\tau_{23})_{ult}} \right)^2 - 1 \right] \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{(\sigma_2^C)_{ult}} + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (304)$$

Tendo em vista as dificuldades na obtenção do termo τ_{23} , uma expressão alternativa é proposta para o cálculo dessa resistência caso ela não seja informada pelo usuário, sobre a premissa de um plano de falha de 53° com relação à direção 1 [56, 61]:

$$(\tau_{23})_{ult} = 0.5(\sigma_2^C)_{ult} \quad (305)$$

8.2.8 Hoffman

Critério semelhante ao de Tsai-Wu, que será mostrado posteriormente, utilizando a mesma equação para o cálculo do IF . Entretanto, propõe uma expressão alternativa para o cálculo do termo de interação η através de uma expressão dependente apenas das resistências da lâmina em ensaios unidirecionais [62]:

$$IF = \sigma_1 \left[\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}} \right] + \sigma_2 \left[\frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}} \right] + \sigma_3 \left[\frac{1}{(\sigma_3^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_3^C)_{ult}} \right] + \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} + \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}} + \frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3^T)_{ult}(\sigma_3^C)_{ult}} + \frac{\tau_{12}^2}{(\tau_{12})_{ult}^2} + 2\eta\sigma_1\sigma_2 \quad (306)$$

onde:

$$\eta = -\frac{1}{2(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (307)$$

8.2.9 LaRC03

Um critério de falha também muito complexo, mas que não exige tantos parâmetros específicos quanto o de Puck. A falha da matriz em compressão é modelada com base no plano de fratura de Mohr-Coulomb, e a compressão na fibra considera o efeito de *kinking* no desalinhamento [56]. Seu principal diferencial é a busca que faz pelo ângulo crítico de falha (ψ), que vai de 0° até o valor máximo de $\psi_0 = 53^\circ$ (plano de falha determinado por Puck [61]). Dessa forma, é feito um laço para ψ , escolhendo o valor que maximiza o IF .

Os modos de falha propostos pelos autores são os seguintes [56]:

Modo 1 (falha na matriz):

Caso $\sigma_2 \geq 0$,

$$IF = (1 - \eta_1) \frac{\sigma_2}{\sigma_{2,is}^T} + \eta_1 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12,is}} \right)^2 \quad (308)$$

caso contrário, o Modo 1 é dividido ainda em mais dois casos. Verificando-se a inequação $\sigma_2 < 0$ e $\sigma_1 \geq -(\sigma_2^C)_{ult}$, utiliza-se a seguinte expressão:

$$IF = \left[\frac{\tau_{23,ef}}{(\tau_{23})_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,ef}}{\tau_{12,is}} \right]^2 \quad (309)$$

e caso $\sigma_1 < -(\sigma_2^C)_{ult}$:

$$IF = \left[\frac{\tau_{23,ef}^d}{(\tau_{23})_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,ef}^d}{\tau_{12,is}} \right]^2 \quad (310)$$

Modo 2 (falha na fibra)

Caso $\sigma_1 > 0$,

$$IF = \frac{\left| \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} \right|}{\varepsilon_1^T} \quad (311)$$

caso contrário mais dois casos são propostos. Para $\sigma_2^d < 0$ tem-se

$$IF = \left\langle \frac{|\tau_{12}^d| + \eta_2 \sigma_2^d}{\tau_{12,is}} \right\rangle \quad (312)$$

se $\sigma_2^d \geq 0$:

$$IF = (1 - \eta_1) \left(\frac{\sigma_2^d}{\sigma_{2,is}^T} \right) + \eta_1 \left(\frac{\sigma_2^d}{\sigma_{2,is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^d}{\tau_{12,is}} \right)^2 \quad (313)$$

onde foi utilizada a notação do colchete de McCauley, exemplificada a seguir para um número real x :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|) \quad (314)$$

ou seja, se $x > 0$ resulta em x , caso contrário resulta em zero. Caso $(\tau_{23})_{ult}$ não seja informado pelo usuário utiliza-se:

$$(\tau_{23})_{ult} = (\sigma_2^C)_{ult} \cos(\psi_0) \left[\sin(\psi_0) + \frac{\cos(\psi_0)}{\tan(2\psi_0)} \right] \quad (315)$$

As tensões efetivas (denotadas pelo subscrito *ef*) e tensões que consideram desalinhamentos (sobrescrito *d*) são calculadas em função do ângulo das fibras desalinhadas (θ_d) e do ângulo ψ .

$$\begin{aligned} \sigma_2^d &= \sigma_1 \sin^2(\theta_{d,ef}) + \sigma_2 \cos^2(\theta_{d,ef}) - 2|\tau_{12}| \sin(\theta_{d,ef}) \cos(\theta_{d,ef}) \\ \tau_{12}^d &= -\sigma_1 \sin(\theta_{d,ef}) \cos(\theta_{d,ef}) + \sigma_2 \sin(\theta_{d,ef}) \cos(\theta_{d,ef}) + |\tau_{12}| (\cos^2(\theta_{d,ef}) - \sin^2(\theta_{d,ef})) \\ \tau_{23,ef}^d &= \langle -\sigma_2^d \cos(\psi) (\sin(\psi) - \eta_3 \cos(\psi)) \rangle \\ \tau_{12,ef}^d &= \langle \cos(\psi) [|\tau_{12}^d| + \eta_2 \sigma_2^d \cos(\psi)] \rangle \\ \tau_{23,ef} &= \langle -\sigma_2 \cos(\psi) [\sin(\psi) - \eta_3 \cos(\psi)] \rangle \\ \tau_{12,ef} &= \langle \cos(\psi) [|\tau_{12}^d| + \eta_2 \sigma_2 \cos(\psi)] \rangle \end{aligned} \quad (316)$$

onde os ângulos de desalinhamento (θ_d) e desalinhamento efetivo ($\theta_{d,ef}$) são dados por:

$$\begin{aligned} \theta_d &= \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\tau_{12,is}}{(\sigma_1^C)_{ult}} + \eta_2 \right) \left(\frac{\tau_{12,is}}{(\sigma_1^C)_{ult}} \right)}}{2 \left(\frac{\tau_{12,is}}{(\sigma_1^C)_{ult}} + \eta_2 \right)} \right) \\ \theta_{d,ef} &= \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - (\sigma_1^C)_{ult}) \theta_d}{G_{12} + \sigma_1 - \sigma_2} \end{aligned} \quad (317)$$

Para o cálculo das tensões *in situ* (subscrito *is*), é necessário classificar a lâmina em espessa (>0.7 mm) ou fina (≤ 0.7 mm). Caso o usuário marque sua lâmina como espessa as seguintes equações são utilizadas:

$$\sigma_{2,is}^T = 1.12 \sqrt{2} (\sigma_2^T)_{ult} ; \tau_{12,is} = \sqrt{2} (\tau_{12})_{ult} ; \eta_1 = 1.12^2 \frac{\eta_4}{\eta_5} \left[\frac{(\sigma_2^T)_{ult}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (318)$$

caso contrário três novas caixas de diálogo surgirão solicitando a espessura da lâmina t e as taxas de liberação de energia no primeiro e segundo modo (G_{Ic} e G_{IIc}), a partir dos quais se obtém:

$$\sigma_{2,is}^T = \sqrt{\frac{8G_{Ic}}{\pi t \eta_4}} ; \tau_{12,is} = \sqrt{\frac{8G_{IIc}}{\pi t \eta_5}} ; \eta_1 = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} \quad (319)$$

As demais variáveis auxiliares utilizadas por esse critério são:

$$\eta_2 = -\frac{\tau_{12, is} \cos(2\psi_0)}{(\sigma_2^c)_{ult} \cos^2(\psi_0)}; \eta_3 = \frac{-1}{\tan(2\psi_0)}; \eta_4 = 2 \left[\frac{1}{E_2} - \frac{\left(\frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \right)^2}{E_1} \right]; \eta_5 = \frac{1}{G_{12}} \quad (320)$$

8.2.10 NU

Critério baseado no conceito da máxima deformação local [63]. Como trata apenas dos modos de falha na matriz, foi incorporada a falha axial de acordo com o critério da Máxima Tensão.

Modo 1 (falha por tração na matriz), para $\sigma_2 \geq 0$:

$$IF = \frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} + \left(\frac{E_2}{2G_{12}} \right)^2 \left[\frac{\tau_{12}}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 \quad (321)$$

Modo 2 (falha por compressão na matriz), para $\sigma_2 < 0$:

$$IF = \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^c)_{ult}} \right]^2 + \left(\frac{E_2}{G_{12}} \right)^2 \left[\frac{\tau_{12}}{(\sigma_2^c)_{ult}} \right]^2 \quad (322)$$

Modo 3 (falha por cisalhamento na matriz):

$$IF = \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 + 2 \left(\frac{G_{12}}{E_2} \right) \left[\frac{\sigma_2}{(\tau_{12})_{ult}} \right] \quad (323)$$

8.2.11 Pinho

Critério tridimensional, onde a falha em compressão na matriz, como LaRC03, é descrita usando o plano de falha de Mohr-Coulomb. O critério também prevê planos de falha associados à formação de bandas de *kinking*, foco do critério. Aqui o valor do ângulo de fratura por falha em compressão na matriz é considerado 53° como padrão, mas pode ser alterado pelo usuário [64, 65]. Caso não seja informado, uma expressão diferente dos outros critérios é adotada para aproximar a resistência ao cisalhamento fora do plano:

$$(\tau_{23})_{ult} = \frac{(\sigma_2^c)}{2 \tan(\psi)} \quad (324)$$

Calcula-se o ângulo de desalinhamento inicial das fibras φ , assumindo comportamento linear em cisalhamento:

$$\varphi = \eta_1 - \frac{0.5(\sigma_1^C)_{ult} \sin(2\eta_1)}{G_{12}} \quad (325)$$

onde:

$$\eta_1 = \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{(\tau_{12})_{ult}}{(\sigma_1^C)_{ult}} + \eta_2 \right) \frac{(\tau_{12})_{ult}}{(\sigma_1^C)_{ult}}}}{2 \left(\frac{(\tau_{12})_{ult}}{(\sigma_1^C)_{ult}} + \eta_2 \right)} \right) \quad (326)$$

$$\eta_2 = \frac{(\tau_{12})_{ult} \eta_3}{(\tau_{23})_{ult}}; \eta_3 = \frac{-1}{\tan(2\psi)}$$

Calcula-se então a deformação associada ao desalinhamento γ_φ :

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{G_{12}} \left| -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \sin(2\varphi)}{2} + \tau_{12} \cos(2\varphi) \right| \quad (327)$$

Em seguida o ângulo de desalinhamento é atualizado. Caso $\tau_{12} = 0$:

$$\varphi = \varphi + \gamma_\varphi \quad (328)$$

caso contrário:

$$\varphi = \frac{\tau_{12} (\varphi + \gamma_\varphi)}{|\tau_{12}|} \quad (329)$$

Modo 1 (falha longitudinal):

Se $\sigma_1 > 0$:

$$IF = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \quad (330)$$

Caso tenha-se compressão axial é necessário primeiramente recalculas as tensões com relação ao plano de *kinking*. Para casos 2D, onde $\tau_{23} = 0$ o ângulo do plano de *kinking* é nulo, fazendo com que as tensões nas coordenadas locais desse plano sejam idênticas às tensões no plano da fibra [65]. Para recalculas as tensões com relação ao plano de desalinhamento:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,\varphi} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{12} \sin(2\varphi) \\ \sigma_{2,\varphi} &= \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_{1,\varphi} \\ \tau_{12,\varphi} &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(2\varphi)}{2} + \tau_{12} \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (331)$$

e em seguida rotacionar para o plano da fratura:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,\psi} &= \frac{(\sigma_{2,\varphi} + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_{2,\varphi} - \sigma_3)}{2} \cos(2\psi) \\ \sigma_{2,\psi} &= \frac{(\sigma_3 - \sigma_{2,\varphi})}{2} \sin(2\psi) \\ \tau_{12,\psi} &= \tau_{12,\varphi} \cos(\psi)\end{aligned}\tag{332}$$

Caso a tensão normal ao plano de falha seja de tração ($\sigma_{1,\psi} > 0$) o IF é calculado fazendo:

$$IF = \left[\frac{\sigma_{1,\psi}}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_{2,\psi}}{(\tau_{23})_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,\psi}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2\tag{333}$$

caso contrário:

$$IF = \left[\frac{\sigma_{2,\psi}}{(\tau_{23})_{ult} - \eta_3 \sigma_{1,\psi}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,\psi}}{(\tau_{12})_{ult} - \eta_2 \sigma_{1,\psi}} \right]^2\tag{334}$$

Modo 2 (falha transversal):

A Eq. (332) é reescrita em função das tensões em coordenadas locais:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,\psi} &= \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \cos(2\psi) \\ \sigma_{2,\psi} &= -\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \sin(2\psi) \\ \tau_{12,\psi} &= \tau_{12} \cos(\psi)\end{aligned}\tag{335}$$

Caso $\sigma_{1,\psi} < 0$:

$$IF = \left[\frac{\sigma_{2,\psi}}{(\tau_{23})_{ult} - \eta_3 \sigma_{1,\psi}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,\psi}}{(\tau_{12})_{ult} - \eta_2 \sigma_{1,\psi}} \right]^2\tag{336}$$

Caso contrário a Eq. (335) é recalculada considerando $\psi=0$ e o IF se torna:

$$IF = \left[\frac{\sigma_{1,\psi}}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12,\psi}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2\tag{337}$$

8.2.12 Puck

Um critério de falha relativamente complexo que exige um maior número de propriedades, algumas delas não físicas e de difícil determinação [56]. Além de contemplar não-linearidades e dano, diferencia os modos de falha intra-fibra e inter-fibra. Uma vez que necessita de parâmetros extras, o usuário deve informar dados adicionais, que são solicitados assim que o critério em questão é selecionado. São os seguintes:

m_{σ_f} : Fator de concentração de tensões;

n_D : Fator de degradação do material

p_{TL}^- : Ângulo de inclinação do envelope de falha, entre a tensão normal e cisalhante, considerando o plano de falha como referência e material sobre compressão transversal;

p_{TL}^+ : Ângulo de inclinação do envelope de falha, entre a tensão normal e cisalhante, considerando o plano de falha como referência e material sobre tração transversal;

$E_{1,f}$: Módulo de elasticidade da fibra da lâmina na direção 1 (é oferecida aqui a possibilidade de utilização do valor de uma fibra do banco de dados ou inserção manual do valor);

$\nu_{12,f}$: Coeficiente de Poisson da fibra da lâmina no plano 12 (é oferecida aqui a possibilidade de utilização do valor de uma fibra do banco de dados ou inserção manual do valor);

Abaixo é transcrito o equacionamento de cada modo de falha [61]:

Modo 1 (falha intra-fibra):

Se $\sigma_1 \geq 0$,

$$IF = \frac{1}{(\varepsilon_1^T)_{ult}} \left| \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12,f}}{E_{1,f}} \sigma_2 m_{\sigma f} \right| \quad (338)$$

caso contrário,

$$IF = \frac{1}{(\varepsilon_1^C)_{ult}} \left| \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12,f}}{E_{1,f}} \sigma_2 m_{\sigma f} \right| + (10\gamma_{12})^2 \quad (339)$$

Modo 2 (falha inter-fibra):

Caso $\sigma_2 \geq 0$,

$$IF = \sqrt{\left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 + \left[1 - p_{TL}^+ \frac{(\sigma_2^T)_{ult}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2} + p_{TL}^+ \frac{\sigma_2}{(\tau_{12})_{ult}} + \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1nD}} \right| \quad (340)$$

caso contrário existem ainda duas outras opções para o cálculo do IF , e a inequação abaixo deve ser utilizada para optar entre elas:

$$0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{12}} \right| \leq \frac{\eta_1}{|\eta_2|} \quad (341)$$

onde, caso ela seja satisfeita, o IF do Modo 2 é dado por:

$$IF = \frac{1}{(\tau_{12})_{ult}} \left[\sqrt{\tau_{12}^2 + (p_{TL}^- \sigma_2)^2} + p_{TL}^- \sigma_2 \right] + \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1nD}} \right| \quad (342)$$

e caso não seja satisfeita:

$$IF = \left[\left(\frac{\tau_{12}}{2(1+\eta_3)(\tau_{12})_{ult}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^C)_{ult}} \right)^2 \right] \frac{(\sigma_2^C)_{ult}}{(-\sigma_2)} + \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1nD}} \right| \quad (343)$$

onde a tensão para degradação linear σ_{1nD} e as variáveis auxiliares são dados por:

$$\sigma_{lnD} = \frac{\sigma_1}{\left[\frac{\sigma_1}{1.1(\sigma_1^{T ou C})_{ult}} \right]^{n_D}}$$

$$\eta_1 = \frac{(\tau_{12})_{ult}}{2p_{TL}^-} \left[\sqrt{1 + 2p_{TL}^- \frac{(\sigma_2^C)_{ult}}{(\tau_{12})_{ult}}} - 1 \right] \quad (344)$$

$$\eta_2 = (\tau_{12})_{ult} \sqrt{1 + 2\eta_3}$$

$$\eta_3 = p_{TL}^- \frac{\eta_1}{(\tau_{12})_{ult}}$$

OBS: o sobrescrito “*T ou C*” na primeira das Equações (344) se torna simplesmente “*T*” (designando resistência a tração longitudinal) caso $\sigma_1 > 0$, caso contrário se torna “*C*” (designando resistência a compressão longitudinal).

8.2.13 Sun

Um critério de falha semelhante ao de Hashin, mas que incorpora um coeficiente de atrito η , definido pelo usuário, na interação entre compressão transversal e cisalhamento. O valor *default* para η é de 0.3, e não deve ser superior a 1.0 [66].

Modo 1, tração na fibra:

Se $\sigma_1 > 0$,

$$IF = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \quad (345)$$

caso contrário, compressão na fibra,

$$IF = \frac{|\sigma_1|}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (346)$$

Modo 2:

Se $\sigma_2 > 0$, tração na matriz:

$$IF = \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (347)$$

caso contrário, compressão na matriz:

$$IF = \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^C)} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult} - \eta\sigma_2} \right]^2 \quad (348)$$

8.2.14 TCV

Este critério tem uma preocupação maior com a falha por cisalhamento, e foi concebido a partir de ensaios de endentação a baixas velocidades [67]. Necessita do mesmo parâmetro adicional de não-linearidade em deformações cisalhantes χ adotado por Chang-Chang, cujo valor padrão é $7,21 \times 10^{-27} \text{ Pa}^{-3}$.

Modo 1:

Caso $\sigma_1 > 0$,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right)^2} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (\text{tração na fibra}) \quad (349)$$

caso contrário,

$$IF = \sqrt{\frac{|\sigma_1|}{(\sigma_1^C)_{ult}}} \quad (\text{compressão na fibra}) \quad (350)$$

Modo 2:

Caso $\sigma_2 > 0$,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right)^2 - \frac{\sigma_2 \sigma_3}{(\tau_{23})_{ult}^2} + \frac{\eta_1}{\eta_2}} \quad (\text{tração na matriz}) \quad (351)$$

caso contrário,

$$IF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2(\tau_{23})_{ult}} \right)^2 + \left[\left(\frac{(\sigma_2^C)_{ult}}{2(\tau_{23})_{ult}} \right)^2 - 1 \right] \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{(\sigma_2^C)_{ult}} - \frac{\sigma_2 \sigma_3}{(\tau_{23})_{ult}^2} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right]} \quad (\text{compressão na matriz}) \quad (352)$$

onde, caso o valor de τ_{23} não seja informado, novamente faz-se uso da Equação (305). As variáveis auxiliares são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{2\tau_{12}^2}{G_{12}} + 3\chi \tau_{12}^4 \\ \eta_2 &= \frac{2(\tau_{12})_{ult}^2}{G_{12}} + 3\chi (\tau_{12})_{ult}^4 \end{aligned} \quad (353)$$

Para casos tridimensionais é inserido ainda o modo de delaminação:

$$IF = \frac{\sigma_3}{(\sigma_2^T)_{ult}} \quad (\text{delaminação}) \quad (354)$$

8.2.15 Tsai-Hill

O critério de Tsai-Hill [68], assim como o critério de Azzi-Tsai, baseia-se no princípio da mínima energia de distorção de Von Mises, mas contempla apenas as resistências à tração [2].

$$IF = \left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 - \left[\frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1^T)_{ult}^2} \right] + \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 \quad (355)$$

8.2.16 Tsai-Melo unit circle

Foi concebido com foco em laminados [69]. Para avaliar o IF é necessário apenas o conhecimento das deformações de ruptura longitudinais (em tração e compressão).

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} ; \eta_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} ; \eta_3 = \frac{\gamma_{12}}{2} \\ \eta_4 &= \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} ; \eta_5 = \eta_1 + \eta_4 ; \eta_6 = \eta_1 - \eta_4 \end{aligned} \quad (356)$$

As demais variáveis auxiliares são calculadas em função de η_5 e η_6 . Se $\eta_5 > 0$,

$$\eta_7 = \frac{\eta_5}{(\varepsilon_1^T)_{ult}} \quad (357)$$

caso contrário,

$$\eta_7 = \frac{\eta_5}{(\varepsilon_1^C)_{ult}} \quad (358)$$

Analogamente, se $\eta_6 > 0$,

$$\eta_8 = \frac{\eta_6}{(\varepsilon_1^T)_{ult}} \quad (359)$$

caso contrário,

$$\eta_8 = \frac{\eta_6}{(\varepsilon_1^C)_{ult}} \quad (360)$$

Finalmente, o IF é calculado por:

$$IF = \sqrt{\eta_7^2 + \eta_8^2} \quad (361)$$

8.2.17 Tsai-Wu

Ao contrário dos demais critérios polinomiais, este critério satisfaz os requisitos das invariantes para a transformação de coordenadas, baseando-se na teoria da energia de deformação total. Entretanto, além das cinco resistências características de um material compósito, necessita ainda de uma sexta resistência, obtida experimentalmente em ensaios de tração biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$) [70].

$$IF = \sigma_1 \left[\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}} \right] + \sigma_2 \left[\frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}} \right] + \sigma_3 \left[\frac{1}{(\sigma_3^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_3^C)_{ult}} \right] + \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} + \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}} + \frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3^T)_{ult}(\sigma_3^C)_{ult}} + \frac{\tau_{12}^2}{(\tau_{12})_{ult}^2} + 2\eta \sigma_1 \sigma_2 \quad (362)$$

onde:

$$\eta = \frac{1}{2\sigma_{biaxial}^2} \left[1 - \sigma_{biaxial} \left(\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}} + \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} + \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}} \right) \quad (363)$$

Como o valor de η frequentemente não está disponível, seu valor é comumente determinado a partir do termo de interação f , cujo valor varia de -1 a 1 (0 por padrão) [8]:

$$\eta = f \sqrt{\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}}} \quad (364)$$

O usuário deverá escolher entre fornecer f ou $\sigma_{biaxial}$ selecionando a opção correspondente.

9. Macro-mecânica de Laminados

9.1 Construção do laminado

Este módulo pode ser acessado através do menu superior (“Macro-laminados” – “Laminados”), conforme mostrado na Figura 9.1. Nesta tela o usuário deve preencher o campo “Nome” e informar o número de lâminas que irão compor seu laminado. Ao alterar este número, a tabela abaixo desse campo será atualizada de acordo. Para cada uma das lâminas deverá ser informado o material, espessura t (mm) e ângulo θ (°) de orientação das fibras. Caso o usuário deseje utilizar uma lâmina não listada, ele deverá criá-la no menu “Macro-Lâminas”-“Lâminas” (ver Seção 8). Em seguida, é necessário clicar em “Salvar”. Para facilitar a criação de laminados simétricos é possível habilitar a opção “Simétrico”, ao lado do número de lâminas (ver Figura 9.1). Neste caso a metade superior do laminado será espelhada para a parte inferior, que terá sua edição restrita.

Camada	Lâmina	Espessura (mm)	Ângulo (°)
1	Vidro-S2/Epóxi	1.0	0.0
2	Carbono T700/Epóxi	2.5	30.0
3	Carbono/Epóxi T300/976	4.0	60.0

Figura 9.1 – Interface do módulo para construção de compósito laminado.

Ao clicar em “Calcular” é exibida a matriz **ABD** do laminado, bem como sua inversa, calculadas conforme mostrado a seguir [2]:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (365)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (366)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (367)$$

$$ABD = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \quad (368)$$

onde a matriz $\bar{Q}$ é calculada em função das propriedades da lâmina e de seu ângulo, conforme descrito na Equação (266), k é o contador de lâmina, N é o número de lâminas, e h_k é a altura da lâmina k , cujo referencial é mostrado na Figura 9.2. A altura total h do laminado é calculada somando-se as espessuras de todas as lâminas.

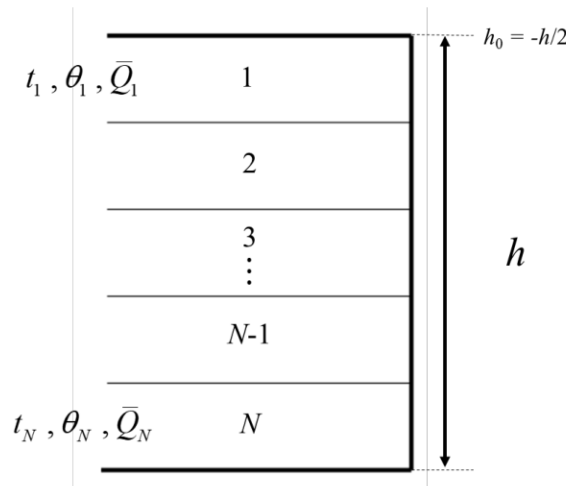


Figura 9.2 – Referencial para a cota h das lâminas.

Caso o usuário deseje visualizar a matriz $\bar{Q}$ de cada uma das lâminas, basta clicar no botão “Mostrar Q-Bars”, localizado na parte inferior da coluna de resultados. Caso o laminado informado seja simétrico, são calculadas ainda suas constantes de engenharia e constantes de flexão (sobrescrito f) [2]:

$$E_x = \frac{1}{A_{11}^* h}; E_y = \frac{1}{A_{22}^* h}; \nu_{xy} = -\frac{A_{12}^*}{A_{11}^*}; G_{xy} = \frac{1}{A_{66}^* h} \quad (369)$$

$$E_x^f = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}; E_y^f = \frac{12}{h^3 D_{22}^*}; \nu_{xy}^f = -\frac{D_{12}^*}{D_{22}^*}; G_{xy}^f = \frac{12}{h^3 D_{66}^*} \quad (370)$$

onde um “*” foi utilizado para denotar a inversa da matriz em questão.

9.2 Análise de falha em laminados

Após efetuar a criação e salvar um laminado, pode-se proceder para a análise de falha deste clicando em “Macro-Laminados” – “Critérios de falha”. É necessário selecionar o laminado, informar os esforços aos quais este é submetido (forças F e momentos M por unidade de comprimento) e selecionar um dos critérios de falha disponíveis (para mais detalhes sobre as considerações de cada critério ver Seção 8.2). Antes de calcular o índice de falha e coeficiente de segurança do laminado, é necessário determinar as tensões experimentadas por cada uma das lâminas [2]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (371)$$

onde o sobrescrito “0” denota deformação axial na linha neutra do laminado e κ denota curvatura. Pode-se então calcular a deformação, em coordenadas globais, do laminado em função da coordenada z de sua espessura:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad (372)$$

A partir das deformações globais podem ser calculadas tanto as deformações quanto as tensões em coordenadas locais (ver Seção 8.2). Ao clicar em “Mostrar/esconder tensões locais” o MECH-Gcomp informa o valor calculado na parte inferior e superior de cada uma das lâminas. Estes valores são então utilizados para avaliação do índice de falha, de acordo com o critério selecionado.

10. Vigas Sanduíche

Para definir os materiais e geometria da seção transversal da viga-sanduíche o usuário deve, primeiramente, clicar na aba “Vigas Sanduíche” e escolher o submenu “Materiais e Geometria”. Nesta página o usuário deve selecionar um núcleo e as faces de sua viga, o que é feito abaixo dos títulos “Núcleo” e “Faces”, respectivamente, mostrados na Figura 10.1. Enquanto um novo núcleo pode ser diretamente criado nesta página, salvo e deletado, a criação de novas faces deve ser feita na aba “Macro-Lâminas”, submenu “Lâminas”, e a de novos laminados na aba “Macro-Laminados”, submenu “Laminados”. Após salvas, elas serão automaticamente exportadas para o módulo de vigas sanduíche, onde podem ser selecionadas para compor as faces da viga.

The screenshot displays the MECH-GCOMP software interface for defining sandwich beam properties. The interface is organized into three main sections: **Núcleo** (Core), **Faces** (Faces), and **Geometria** (Geometry).

- Núcleo:** Features a dropdown menu currently set to "High dens foam". Below it is a table of material properties:

Nome	High dens foam
Densidade [kg/m ³]	2.49894e+2
E [Pa]	2.99922e+8
ν	
G [Pa]	1.09971e+8
Diâmetro [m]	

 At the bottom of this section are buttons for "Salvar", "Deletar", and "Limpar dados".
- Faces:** Contains radio buttons for "Lâmina" (selected) and "Laminado". Below the "Lâmina" option is a dropdown for "AS4_3502". A text input field for "Ângulo de orientação do reforço [°]" is set to "30".
- Geometria:** Includes input fields for "Largura da face w[m]" (value: 2), "Espessura do núcleo t_n [m]" (value: 0.5), and "Espessura da face t_f [m]" (value: 0.2). A "Limpar dados" button is located below these fields.

To the right of the input fields is a 3D diagram of a sandwich beam with dimensions labeled: L (length), w (width), t_f (face thickness), and t_n (core thickness).

At the bottom of the interface is the **Vigas Sanduíche** section, which includes a text input field for "Nome", and "Salvar Sanduíche" and "Deletar Sanduíche" buttons.

Figura 10.1 – Interface do submenu “Materiais e Geometrias”.

Após definir o material do núcleo, o usuário deve informar se suas faces são compostas por uma única lâmina ou por um laminado. No caso de serem formadas por lâminas, será solicitado o ângulo de orientação do reforço nestas, onde um ângulo de 0° indica fibras paralelas ao comprimento da viga. As equações para o cálculo das constantes de engenharia em função do ângulo são descritas na Seção 5. Em seguida, basta definir a espessura das faces (t_f), do núcleo (t_n) e a largura da viga (w) abaixo do título “Geometria”. Caso seja selecionada a opção “Laminado”, t_f é calculado automaticamente a partir da soma da espessura t de cada uma das lâminas. Por último, basta salvar as configurações escolhidas nos títulos “Núcleo”, “Lâmina” e “Geometria”. Isso pode ser feito mediante a atribuição de um nome e clicando no botão “Salvar”, abaixo do título “Vigas Sanduíche”, mostrando na parte inferior da Figura 10.1, fazendo com que essa seção transversal de viga esteja disponível no submenu “Esforços”, acessado através da aba “Vigas Sanduíche”.

Para efetuar os cálculos na viga o usuário deve se dirigir ao submenu “Esforços”, onde é necessário informar o comprimento da viga, o tipo de viga (criado em “Materiais e Geometria”), e escolher entre análise de flexão ou análise de flambagem. Como são aplicadas teoria de vigas, após a inserção do comprimento é verificado se este é consideravelmente superior (10×) à largura e altura do sanduíche. Caso não seja, uma advertência aparecerá sugerindo a utilização de um valor que cumpra essa recomendação (não mandatória para execução dos cálculos).

Nas próximas seções será mostrado o equacionamento da flexão Seção (10.1) e flambagem (Seção 10.2). Quando não for especificado, as equações são mostradas para o caso geral de laminados, com número de lâminas N . Para o caso de faces compostas por lâminas é assumido $N=1$.

10.1 Análise de flexão

Na análise de flexão é necessário escolher uma dentre as 14 condições de contorno/carregamento disponíveis. Em função dessa escolha serão solicitados os valores da carga distribuída (q), carga concentrada (P) ou sua distância em relação aos apoios (x).

Os primeiros cálculos são da densidade ρ e massa m da viga:

$$\rho = \frac{\rho_c t_c + 2 \sum_{i=1}^N \rho_f(i) t(i)}{h} \quad (373)$$

$$m = 2 \sum_{i=1}^N \rho_f(i) L w t(i) + \rho_c L w t_c \quad (374)$$

onde a altura da viga $h = 2 t_f + t_c$, L é o comprimento da viga e i é o número da lâmina. É calculado também seu momento de inércia de área I :

$$I = \frac{w h^3}{12} \quad (375)$$

As deflexões são calculadas através da equação abaixo, somando-se a parcela da contribuição da flexão (primeiro termo) com a do cisalhamento (segundo termo):

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{M}{\langle EI \rangle_{eq}} + \frac{Q'}{\langle GA \rangle} \quad (376)$$

Esta equação diferencial é integrada em relação a y (coordenada longitudinal) e resolvida mediante a aplicação das condições de contorno selecionadas, sendo fornecido ao usuário a solução de Euler-Bernoulli, que leva em consideração apenas o primeiro termo, dependente do momento fletor (M) e da rigidez à flexão $\langle EI \rangle_{eq}$, e a de Timoshenko, que incorpora também a contribuição cisalhante em função do esforço cortante (Q) e da rigidez ao cisalhamento $\langle GA \rangle$. Dessa forma, aplica-se o princípio da superposição, onde o deslocamento total é dado pela soma das contribuições oriundas da flexão (u_{fle}) e do cisalhamento (u_{cis}).

Os diagramas de esforço cortante e fletor em função de x foram checados com soluções de outros autores [71] [72]. As rigidezes equivalentes da viga homogeneizada foram calculadas da seguinte forma [73]:

$$\langle EI \rangle_{eq} = 2w \sum_{i=1}^N E_{1f}(i) \left[\frac{t^3(i)}{12} + t(i)d^2(i) \right] + \frac{E_c w t_c^3}{12} \quad (377)$$

$$\langle GA \rangle_{NM} = \frac{G_c w (t_c + t_f)^2}{t_c} \quad ; \quad \langle GA \rangle_{NR} = \frac{G_c w t_c}{k} + \sum_{i=1}^N \frac{2G_{12,f}(i) w t(i)}{k} \quad (378)$$

onde d é a distância do centro de gravidade da lâmina i até o centro de gravidade do sanduíche, e o valor do índice de correção de Timoshenko é assumido como 1 [74] [75]. É importante observar que a Equação (376) gera três *outputs*, o primeiro deles em acordo com a teoria de vigas de Euler-Bernouli. Os outros dois se distinguem entre si no cálculo de $\langle GA \rangle$, mostrado na Equação (378). Na primeira alternativa, $\langle GA \rangle_{NM}$, o núcleo é assumido como macio ($E_c \ll E_f$), desprezando a contribuição de G_f , enquanto na segunda, $\langle GA \rangle_{NR}$, o núcleo é assumido como rígido. É reportado somente o valor de deslocamento máximo ao longo da viga, à exceção das condições de contorno com saliências, onde são reportados os valores máximos entre suportes e na saliência.

Os valores máximos das tensões de flexão no núcleo (σ_n) e na face (σ_f), e de cisalhamento no núcleo e face (τ_n e τ_f) também são reportados, calculados da seguinte forma:

$$\sigma_c = \frac{M E_c \frac{t_c}{2}}{\langle EI \rangle_{eq}} \quad (379)$$

$$\sigma_f = \frac{M E_{1f}(i) \left(d(i) + \frac{t(i)}{2} \right)}{\langle EI \rangle_{eq}} \quad (380)$$

$$\tau_c = \frac{Q}{\langle EI \rangle_{eq}} \left[E_c \frac{t_c^2}{8} + \sum_{i=1}^N E_{1f}(i) t(i) d(i) \right] \quad (381)$$

$$\tau_f = \frac{Q}{\langle EI \rangle_{eq}} \left[\sum_{i=1}^N E_{1f}(i) t(i) d(i) \right] \quad (382)$$

A seguir são apresentadas a solução da Equação (376) em função da coordenada do comprimento da viga (y) e os valores de M e Q máximos, utilizados para o cálculo das tensões para cada uma das condições de contorno incorporadas ao programa.

10.1.1 Apoiada com saliência: Carga pontual

Deslocamentos entre suportes:

$$u_{fle} = - \frac{Pxy}{6 \langle EI \rangle_{eq} (L-x)} \left[(L-x)^2 - y^2 \right] \quad (383)$$

$$u_{cis} = 0$$

Deslocamentos na saliência:

$$u_{fle} = \frac{Py_2 \left[2x(L-x) + 3xy_2 - y_2^2 \right]}{6 \langle EI \rangle_{eq}} \quad (384)$$

$$u_{cis} = \frac{[Py + P(x-L)]}{\langle GA \rangle}$$

onde y_2 é a coordenada na viga contada a partir do segundo suporte (direito), e não a partir do primeiro (esquerdo), como y .

Esforços:

$$Q = P$$

$$M = Px \quad (385)$$

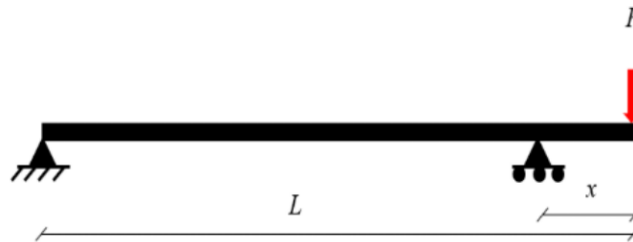


Figura 10.2 – Viga apoiada com saliência sujeita a uma carga pontual P , distante de uma distância x do apoio.

10.1.2 Apoiada com saliência: Carga uniforme

Deslocamentos entre suportes:

$$u_{fle} = -\frac{qx^2y}{12 \langle EI \rangle_{eq} (L-x)} \left[(L-x)^2 - y^2 \right] \quad (386)$$

$$u_{cis} = 0$$

Deslocamentos na saliência:

$$u_{fle} = \frac{qy_2 \left[4x^2(L-x) + 6x^2y_2 - 4xy_2^2 + y_2^3 \right]}{24 \langle EI \rangle_{eq}} \quad (387)$$

$$u_{cis} = \frac{qxy_2 - qy_2^2}{\langle GA \rangle}$$

onde y_2 é a coordenada na viga contada a partir do segundo suporte (direito), e não a partir do primeiro (esquerdo), como y .

Esforços:

$$\begin{aligned} Q &= qx \\ M &= \frac{qx^2}{2} \end{aligned} \quad (388)$$

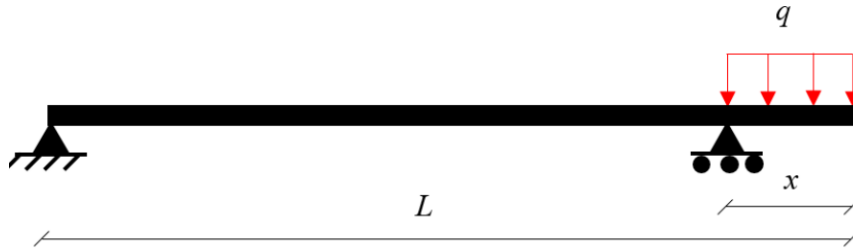


Figura 10.3 – Viga apoiada com saliência sujeita a uma carga distribuída q ao longo da saliência de comprimento x .

10.1.3 Bi-apoiada: Carga pontual

Deslocamentos para coordenadas y inferiores ao ponto de aplicação da carga (x):

$$\begin{aligned} u_{fle} &= \frac{\frac{-Py^3}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \eta_1 y}{\langle EI \rangle_{eq}} \\ u_{cis} &= \frac{Py \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{\langle GA \rangle} \end{aligned} \quad (389)$$

Deslocamentos para coordenadas y superiores a x :

$$\begin{aligned} u_{fle} &= \frac{\frac{Py^3 x}{6L} - Py^2 x + \eta_2 y + \eta_3}{\langle EI \rangle_{eq}} \\ u_{cis} &= \frac{\frac{-Pxy}{L} + Px}{\langle GA \rangle} \end{aligned} \quad (390)$$

onde:

$$\eta_1 = \frac{\frac{Px^3 - PL^2 x}{3(x-L)} - \frac{Px^2}{2}}{1 - \frac{x}{x-L}}; \eta_2 = \frac{Px^3 - PL^2 x}{3(x-L)} + \frac{\eta_1 x}{x-L}; \eta_3 = \frac{PL^2 x}{3} - \eta_2 L \quad (391)$$

Esforços (para $x \leq L/2$):

$$Q = \frac{P(L-x)}{L}$$

$$M = \frac{Px(L-x)}{L}$$
(392)

Esforços (para $x > L/2$):

$$Q = \frac{Px}{L}$$

$$M = \frac{Px(L-x)}{L}$$
(393)

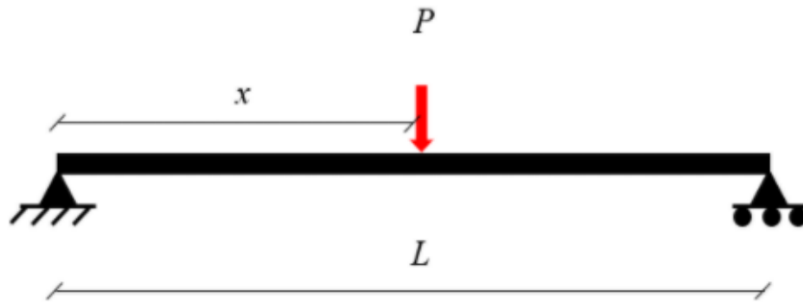


Figura 10.4 – Viga bi-apoiada sujeita a uma carga P aplicada a uma distância x do suporte esquerdo.

10.1.4 Bi-apoiada: Duas cargas pontuais

Deslocamentos para coordenadas y inferiores à distância x de aplicação de P (deslocamentos entre a carga e o apoio da direita são obtidos por simetria):

$$u_{fle} = \frac{Py(3Lx - 3x^2 - y^2)}{6\langle EI \rangle_{eq}}$$
(394)

$$u_{cis} = \frac{Py}{\langle GA \rangle}$$

Deslocamentos para o trecho entre as forças P :

$$u_{fle} = \frac{Px(3Ly - 3y^2 - x^2)}{6\langle EI \rangle_{eq}}$$
(395)

$$u_{cis} = \frac{Px}{\langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$\begin{aligned} Q &= P \\ M &= Px \end{aligned} \quad (396)$$



Figura 10.5 – Viga bi-apoiada sujeita a duas cargas pontuais P , onde uma delas se encontra a uma distância x do apoio esquerdo, e a outra a uma mesma distância x do apoio direito.

10.1.5 Bi-apoiada: Carga uniforme

Deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_{fle} &= \frac{q y}{24 \langle EI \rangle_{eq}} (L^3 - 2Ly^2 + y^3) \\ u_{cis} &= \frac{q y (L - y)}{2 \langle GA \rangle} \end{aligned} \quad (397)$$

Esforços:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{qL}{2} \\ M &= \frac{qL^2}{8} \end{aligned} \quad (398)$$

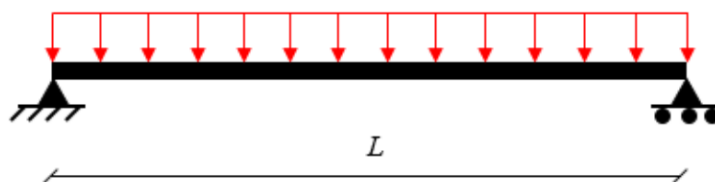


Figura 10.6 – Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q .

10.1.6 Bi-apoiada: Carga crescente

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{q y}{360 \langle EI \rangle_{eq} L} (3y^4 - 10L^2 y^2 + 7L^4)$$

$$u_{cis} = \frac{q Ly}{6 \langle GA \rangle} - \frac{q y^3}{6 \langle GA \rangle L}$$
(399)

Esforços:

$$Q = \frac{qL}{3}$$

$$M = \frac{qL^2}{9\sqrt{3}}$$
(400)

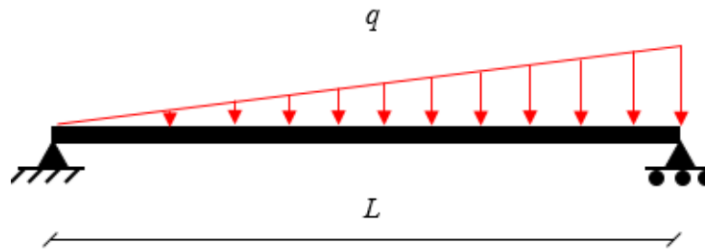


Figura 10.7 – Viga bi-apoiada sujeita a um carregamento distribuído linearmente de 0 a q .

10.1.7 Bi-apoiada: Carga triangular

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{q y (L/2) (5L^2 - 4y^2)^2}{480 \langle EI \rangle_{eq} L^2}$$

$$u_{cis} = \frac{qLy}{4 \langle GA \rangle} - \frac{qy^3}{3L \langle GA \rangle}$$
(401)

onde $y \leq L/2$, enquanto que para os demais valores o deslocamento é obtido por simetria.

Esforços:

$$Q = \frac{qL}{4}$$

$$M = \frac{qL}{12}$$
(402)

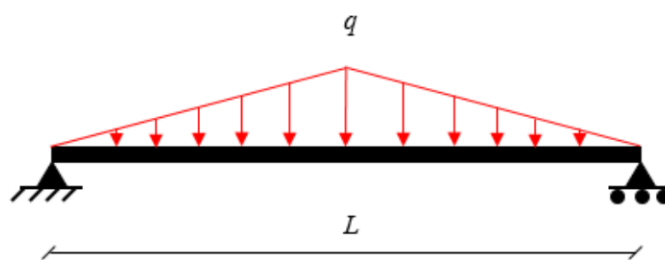


Figura 10.8 – Viga bi-apoiada submetida a um carregamento triangular com valor máximo q .

10.1.8 Engastada: Carga pontual

Deslocamentos para valores de $y \leq x$:

$$u_{fle} = \frac{Py^2}{6\langle EI \rangle_{eq}} (3x - y)$$

$$u_{cis} = \frac{Py}{\langle GA \rangle}$$
(403)

Deslocamentos para valores de $y > x$:

$$u_{fle} = \frac{Px^2}{6\langle EI \rangle_{eq}} (3y - x)$$

$$u_{cis} = \frac{Px}{\langle GA \rangle}$$
(404)

Esforços:

$$Q = P$$

$$M = Px$$
(405)

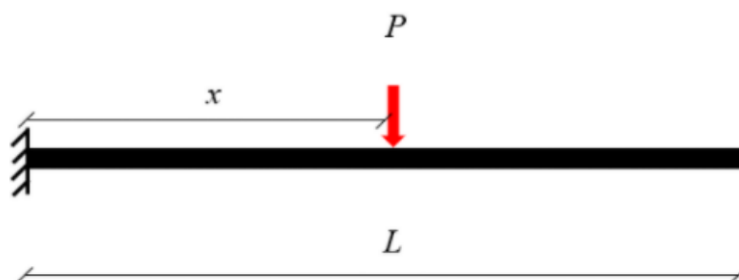


Figura 10.9 – Viga engastada sujeita a uma carga pontual P .

10.1.9 Engastada: Carga uniforme

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{q(3y^4 + 4L^3y + 3y^4)}{48\langle EI \rangle_{eq}} \quad (406)$$

$$u_{cis} = \frac{qLy - \frac{qy^2}{2}}{\langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$Q = qL$$

$$M = \frac{qL^2}{2} \quad (407)$$

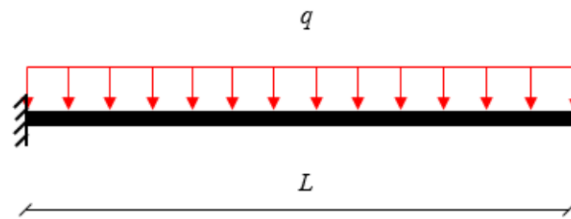


Figura 10.10 – Viga engastada submetida a um carregamento distribuído uniforme q .

10.1.10 Engastada: Carga triangular

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{qy^2(10L^3 - 10yL^2 + 5y^2L - y^3)}{120\langle EI \rangle_{eq}L} \quad (408)$$

$$u_{cis} = \frac{q(3L^2y - 3Ly^2 + y^3)}{6L\langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$Q = \frac{qL}{2}$$

$$M = \frac{qL^2}{6} \quad (409)$$

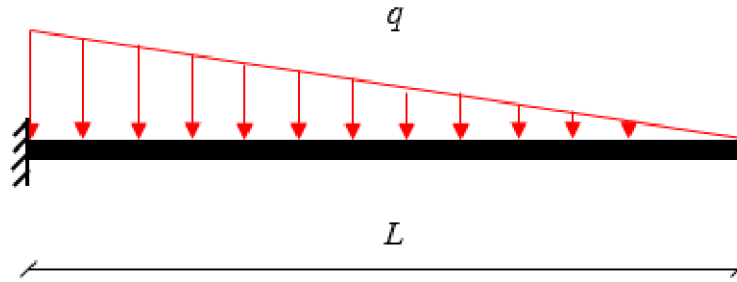


Figura 10.11 – Viga engastada submetida a uma carga que decresce linearmente de q até 0.

10.1.11 Fixa: Carga pontual

Deslocamentos para $y \leq x$:

$$u_{fle} = \frac{2P(L-x)^2 y^2 [3xL - 3xy - y(L-x)]}{12 \langle EI \rangle_{eq} L^3} \quad (410)$$

$$u_{cis} = \frac{Py}{\langle GA \rangle} - \frac{Pxy}{L \langle GA \rangle}$$

Deslocamentos para $y > x$:

$$u_{fle} = \frac{2Px^2 (L-y)^2 [3(L-x)L - 3(L-x)(L-y) - (L-y)x]}{12 \langle EI \rangle_{eq} L^3} \quad (411)$$

$$u_{cis} = \frac{Px}{\langle GA \rangle_{eq}} - \frac{Pxy}{L \langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$Q = \frac{P(L-x)^2 (L+2x)}{L^3} \quad (412)$$

$$M = \frac{Px(L-x)^2}{L^2}$$

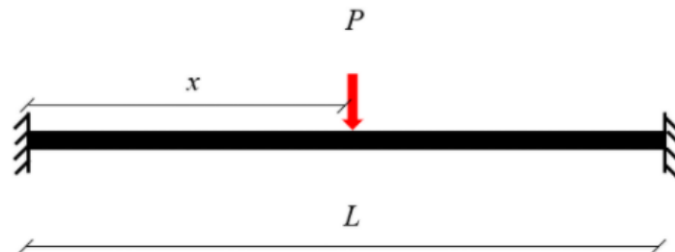


Figura 10.12 – Viga fixa (bi-engastada) com carga pontual P a uma distância x .

10.1.12 Fixa: Carga uniforme:

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{qy^2(L-y)^2}{24\langle EI \rangle_{eq}} \quad (413)$$

$$u_{cis} = \frac{qLy - qy^2}{2\langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$Q = \frac{qL}{2} \quad (414)$$

$$M = \frac{qL^2}{12}$$

q

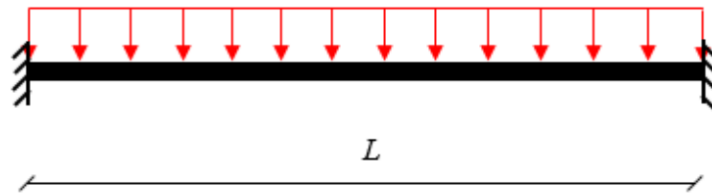


Figura 10.13 – Viga fixa (bi-engastada) submetida a uma carga distribuída uniforme q .

10.1.13 Fixa/apoiada: Carga pontual

Deslocamentos para $y \leq x$:

$$u_{fle} = \frac{P(x-L)y^2 \left[(3L-y)x^2 + 2L(y-3L)x + 2L^2y \right]}{12\langle EI \rangle_{eq} L^3} \quad (415)$$

$$u_{cis} = \frac{Py}{\langle GA \rangle} - \frac{Pxy}{L\langle GA \rangle}$$

Deslocamentos para $y > x$:

$$u_{fle} = -\frac{Px^2(L-y) \left[3Ly(y-2L) + x(2L^2 + 2yL - y^2) \right]}{12\langle EI \rangle_{eq} L^3} \quad (416)$$

$$u_{cis} = \frac{Px}{\langle GA \rangle} - \frac{Pxy}{L\langle GA \rangle}$$

Esforços:

$$Q = \frac{Px^2(3L-x)}{2L^3} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{P(L-x)[3L^2 - (L-x)^2]}{2L^3}$$

$$M = \frac{Px^2(3L-x)}{2L^3}(L-x) \quad \text{ou} \quad M = \frac{Px(L-x)(2L-x)}{2L^2}$$
(417)

Para essa condição de contorno se faz necessária a avaliação de M e Q em dois locais distintos que podem abrigar o valor máximo, onde o valor máximo será utilizado posteriormente para avaliação das tensões.

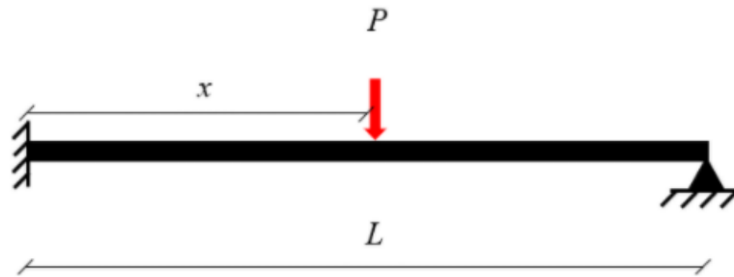


Figura 10.14 – Viga fixa em uma extremidade e apoiada na outra, sujeita a uma carga P .

10.1.14 Fixa/apoiada: Carga uniforme

Deslocamentos:

$$u_{fle} = \frac{qy^2(3L-2y)(L-y)}{48\langle EI \rangle_{eq}}$$

$$u_{cis} = \frac{q(Ly-y^2)}{2\langle GA \rangle}$$
(418)

Esforços:

$$Q = \frac{5qL}{8}$$

$$M = \frac{qL^2}{8}$$
(419)

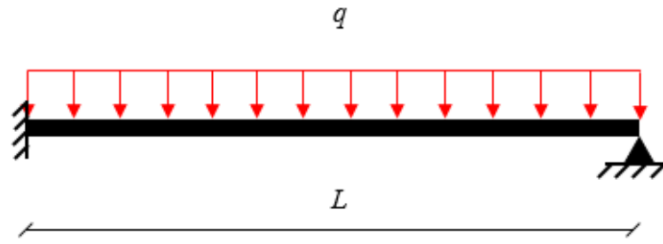


Figura 10.15 – Viga fixa em uma extremidade e apoiada na outra, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q .

10.2 Análise de flambagem

Nesta análise são também computados e mostrados nos resultados a densidade e massa, inércia e rigidezes equivalentes, da mesma forma que na análise anterior. Novamente faz-se a distinção entre cálculos que utilizam a premissa de núcleo macio ou rígido.

Para a predição da força compressiva que leva a viga à flambagem (F_{cr}) são novamente utilizados os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko (considerando $\langle GA \rangle_{NM}$ e $\langle GA \rangle_{NR}$), mostrados abaixo:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{KL^2} \quad (\text{Euler-Bernoulli}) \quad (420)$$

$$F_{cr} = \left(\frac{1}{K_{ce}^2} \right) \frac{\pi^2 \langle EI \rangle_{eq}}{L^2 + \pi^2 \frac{\langle EI \rangle_{eq}}{\langle GA \rangle} k \left(\frac{1}{K_{ce}^2} \right)} \quad (\text{Timoshenko}) \quad (421)$$

onde novamente é assumido que $k = 1$ [74]. Já o valor de K_{ce} (fator de comprimento efetivo) é definido em função da condição de contorno selecionada [76], como mostrado na Tabela 10.1, podendo ser inserido também de forma manual. Para os casos em que o valor de K teórico difere do recomendado são calculadas as duas opções, retornando um total de seis *outputs* para F_{cr} , identificados na coluna “Comentário”.

Tabela 10.1 – Valores de K em função das condições de contorno.

Condição de contorno	K_{ce} teórico	K_{ce} recomendado
	0.5	0.65
	0.7	0.8
	1.0	1.2
	1.0	1.0
	2.0	2.1
	2.0	2.0

Um modelo adicional para a predição de F_{cr} foi desenvolvido por Zenkert [77], cuja aplicação foca em vigas sanduíches com geometrias atípicas, onde a hipótese de $t_f \ll t_c$ não é válida:

$$F_{cr} = \frac{\frac{2\pi^4 \eta_1 \eta_2}{K_{ce}^4 L^4} + \frac{\pi^2 \langle EI \rangle_{eq} \langle GA \rangle_{NM}}{K_{ce}^2 L^2}}{\frac{\pi^2 \eta_2}{K_{ce}^2 L^2} + \langle GA \rangle_{NM}} \quad (422)$$

onde:

$$\eta_1 = w \sum_{i=1}^N E_{1f}(i) \frac{t^3(i)}{6} \quad ; \quad \eta_2 = 2w \sum_{i=1}^N E_{1f}(i) t(i) d^2(i) \quad (423)$$

Além das cargas críticas de flambagem global, são também calculadas a carga e tensão considerando flambagem local nas faces. Entretanto, assim como as tensões de compressão para flambagem local, elas dependem do módulo de elasticidade equivalente do laminado ($E_{x,f}$). Expressões fechadas para essa constante estão disponíveis apenas para laminados simétricos, mostradas a seguir:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \bar{Q}(i) t(i) \quad ; \quad \mathbf{A}^* = [\mathbf{A}]^{-1} \quad (424)$$

$$E_{x,f} = \frac{1}{t_f \mathbf{A}^*(1,1)}; E_{y,f} = \frac{1}{t_f \mathbf{A}^*(2,2)}; G_{xy,f} = \frac{1}{t_f \mathbf{A}^*(3,3)}; \nu_{xy,f} = -\frac{\mathbf{A}^*(1,2)}{\mathbf{A}^*(1,1)} \quad (425)$$

onde a direção x é a direção do comprimento da viga, y é a direção na largura e $\mathbf{A}$ é a matriz extensional, de mesmas dimensões que a matriz Q . O cálculo da matriz Q e $\bar{Q}$ foi mostrado nas Equações (263) e (266). No caso da Equação (427), os números que seguem $\mathbf{A}^*$ entre parênteses se referem à linha e à coluna desta.

Portanto, os *outputs* a seguir serão calculados somente para vigas sanduíches cujas faces sejam constituídas de uma única lâmina ou de um laminado simétrico. Iniciando pela carga de flambagem local, tem-se [74]:

$$F_L = 1.64 t_f w E_{x,f} \left(\frac{E_c t_f}{E_{x,f} t_c} \right)^{1/2} \quad (426)$$

A tensão compressiva σ^C que leva a essa flambagem das faces, fazendo com que estas penetrem no núcleo, é um fenômeno comumente denominado *wrinkling*, onde diversas predições com diferentes premissas e hipóteses simplificativas podem ser encontradas na literatura. Iniciando pelo modelo proposto por Allen [78], é assumido uma geometria onde $t_f \ll t_c$, de forma que a flambagem em uma das faces não impacte na face oposta:

$$\sigma^C = \eta (E_{x,f} E_c^2)^{1/3} \quad (427)$$

$$\eta = 3 \left[12(3 - \nu_c)^2 (1 + \nu_c)^2 \right]^{-1/3}$$

Já o modelo de Zenkert [77] despreza o módulo de cisalhamento do núcleo, e baseia-se no *winkler foundation model*, onde o núcleo do sanduíche é considerado como um conjunto contínuo de molas lineares, como mostrado na Figura 10.16, onde a tensão compressiva para flambagem é dada por:

$$\sigma^C = 0.8165 \sqrt{\frac{E_{x,f} t_f E_c}{t_c}} \quad (428)$$



Figura 10.16 – Núcleo dividido em um conjunto de molas lineares, com a flambagem ocorrendo (a) de forma antissimétrica e (b) simétrica com relação à linha média.

Os modelos de Hoff [79], reportados por Zenkert [77], não desprezam G_c , incorporando o modelo *shear lag*, com função de decaimento linear, e dividem-se em quatro situações distintas. Primeiramente classifica-se a flambagem no caso antissimétrico (Figura 10.16 (a)) ou simétrico (Figura 10.16 (b)). Em seguida é avaliado, com base nas propriedades geométricas e

materiais, se a flambagem de uma das faces (assumida como senoidal) influenciará a da face oposta. Dessa forma, tem-se, para o caso simétrico:

$$\sigma^C = 0.91(E_{x,f}E_cG_c)^{1/3}, \text{ para } \eta_1 < \frac{t_c}{2}$$

ou

$$\sigma^C = 0.817\sqrt{\frac{E_{x,f}t_fE_c}{t_c}} + 0.166G_c\left(\frac{t_c}{t_f}\right), \text{ para } \eta_1 \geq \frac{t_c}{2}$$

onde:

$$\eta_1 = 0.91t_f\left(\frac{E_{x,f}E_c}{G_c^2}\right)^{1/3} \quad (430)$$

Para o caso antissimétrico:

$$\sigma^C = 0.51(E_{x,f}E_cG_c)^{1/3} + 0.33G_c\left(\frac{t_c}{t_f}\right), \text{ para } \eta_2 < \frac{t_c}{2}$$

ou

$$\sigma^C = 0.59\sqrt{\frac{E_{x,f}t_fE_c}{t_c}} + 0.387G_c\left(\frac{t_c}{t_f}\right), \text{ para } \eta_2 \geq \frac{t_c}{2}$$

onde:

$$\eta_2 = 1.5t_f\left(\frac{E_{x,f}E_c}{G_c^2}\right)^{1/3} \quad (432)$$

Como em muitos casos não se pode prever se a flambagem será simétrica ou antissimétrica, os dois *outputs* são fornecidos. Outro modelo é proposto por Hoff [79] é disponibilizado, buscando trazer um valor conservativo para a tensão de flambagem:

$$\sigma^C = 0.5(E_{x,f}E_cG_c)^{1/3} \quad (433)$$

Um último modelo proposto por Plantema [80], reportado por Zenkert [77], utiliza o modelo *shear lag* com decaimento exponencial. Com as premissas de $v_{12,f} = 0,3$, e desprezando a influência da flambagem de uma face na outra:

$$\sigma^C = 0.85(E_{x,f}E_cG_c)^{1/3} \quad (434)$$

No caso de vigas sanduíche com núcleos do tipo *honeycomb*, a flambagem pode ocorrer ainda entre as células de diâmetro D , efeito comumente denominado de *dimpling*. Segundo Allen [78], a tensão compressiva que gera esse efeito pode ser determinada por:

$$\sigma^C = \frac{E_{x,f}}{3}\left(\frac{2t_f}{D}\right)^{3/2} \quad (435)$$

Outro modelo proposto por Norris [81] é mencionado por Zenkert [77]:

$$\sigma^c = \frac{2E_{x,f}}{1-\nu_{xy,f}^2} \left(\frac{t_f}{D} \right)^2 \quad (436)$$

Por fim, é calculada a tensão de compressão que causa o descolamento da face e do núcleo [75]:

$$\sigma^c = \sqrt{\frac{G_c E_{x,f}}{t_f}} \quad (437)$$

11. Vasos de pressão

O módulo de tubos cilíndricos e vasos de pressão, acessado através do menu superior (“Outros” – “Vasos de pressão”) inicia com a escolha do laminado a ser utilizado, o que é feito no campo “Material” (ver Figura 11.1). Para isso, um laminado deve ser criado previamente (menu superior “Macro-laminados” – “Laminados”), conforme descrito na Seção 9 deste tutorial. Deve-se atentar para a convenção utilizada para ordenar as lâminas, onde a primeira lâmina do laminado construído corresponde à parte interna do cilindro/vaso, enquanto a última corresponde à parte externa. Essa convenção é comumente utilizada no contexto de enrolamento filamentar, onde a sequência de fabricação segue essa ordem.

Em seguida parte-se para o campo “Geometria”, onde o usuário define se deseja utilizar a abordagem matemática de paredes finas, baseada na teoria de Kirchhof-Love, ou a de paredes espessas, baseada na teoria de Reissner-Mindlin. Não há um consenso na literatura para definir a classificação de uma determinada geometria em fina ou espessa, já que as propriedades mecânicas e carregamentos aplicados vão impactar nessa decisão. Entretanto, uma razão entre o raio e a espessura de $R/t > 10$ é comumente utilizada para classificar uma geometria como sendo de paredes finas [82]. A próxima etapa é a definição de extremidades fechadas (vasos de pressão) ou abertas (tubos cilíndricos). Embora o cálculo de tensões que será descrito posteriormente considere apenas as tensões desenvolvidas nas paredes, e não no domo do vaso, a atribuição de paredes fechadas aqui deve ser feita invariavelmente, caso esteja sendo modelado um vaso. Nesse caso, a presença de uma pressão interna P_i gera uma força axial F definida por:

$$F = \frac{AP_i R_m}{2t} \quad (438)$$

onde R_m é o raio médio e A é a área das paredes:

$$A = \pi (R_o^2 - R_i^2) \quad (439)$$

Por fim, devem ser informadas as cargas mecânicas e térmicas na aba “Carregamentos”, selecionar um dentre os diversos critérios de falha disponíveis (ver Seção 8.2) e pressionar o botão “Calcular”.

Início Nano ▾ Micro - Partículas ▾ Micro - Fibras ▾ Macro - Lâminas ▾ Macro - Laminados ▾ Vigas sanduíche ▾ Outros ▾ Sobre ▾

Outros / Vasos de pressão Vasos de pressão

Material

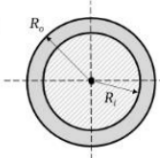
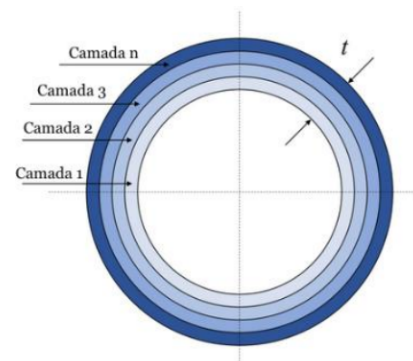
Exemplo ▾

Geometria

Raio interno (R_i) [mm]

☒ Paredes finas
☐ Paredes espessas

☒ Extremidades fechadas (e.g., vasos de pressão)
☐ Extremidades abertas (e.g., tubos cilíndricos)

Carregamentos

Pressão interna [Pa]

Pressão externa [Pa]

Carga axial [N]

Torção [N/m]

Variação de temperatura [°C]

Crítérios de falha

Máxima tensão ▾

Calcular

Figura 11.1 – Interface gráfica do módulo de vasos de pressão.

11.1 Propriedades da seção

A primeira tabela de resultados que surge ao pressionar “Calcular” refere-se às propriedades da seção, iniciando pela espessura da geometria (soma da espessura das camadas). Em seguida, é calculada a área, definida na Eq. (354). A densidade linear é obtida por:

$$W = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i \quad (440)$$

onde i é a i -ésima lâmina de um laminado com N lâminas e ρ é a massa específica.

As demais propriedades da seção são calculadas conforme abaixo:

$$I = \frac{\pi (R_o^4 - R_i^4)}{4} = \frac{J}{2} \quad (441)$$

$$R_g = \frac{\sqrt{R_o^2 + R_i^2}}{2} \quad (442)$$

Onde I e J são os momentos de inércia de área e momento polar de inércia, respectivamente, e R_g é o raio de giração. As constantes de engenharia são calculadas conforme descrito na Seção

9. O cálculo para a variação nos raios e na espessura difere para paredes finas e espessas, e será explicitado nas próximas seções, juntamente com o cálculo de tensões e deformações.

11.2 Paredes finas

A abordagem para o cálculo de tensões de paredes finas segue as hipóteses de Kirchhoff-Love, onde as tensões radiais na estrutura são desprezadas. O equacionamento aplicado a cilindros laminados é reportado por Li, 2023 [82], onde a matriz de rigidez K , definida a partir da matriz ABD do material laminado (ver Seção 9) pode ser expressa por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2\pi R_m A_{11} & 2\pi R_m (A_{12}/R_m - B_{12}/R_m^2) & -2\pi R_m (R_m A_{13} + B_{13}) \\ A_{12}/R_m & A_{22}/R_m^2 - B_{22}/R^3 & -(R_m A_{23} + B_{23})/R \\ -2\pi R_m (R_m A_{13} + B_{13}) & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (443)$$

onde:

$$\begin{aligned} K_{32} &= 2\pi R_m \left[-(R_m A_{23} + B_{23})/R_m + (R_m B_{23} + D_{23})/R_m^2 \right] \\ K_{33} &= 2\pi R_m \left[R_m (R_m A_{33} + B_{33}) + (R_m B_{33} + D_{33}) \right] \end{aligned} \quad (444)$$

A contribuição das cargas e momentos associados à variação de temperatura ΔT são definidos por:

$$\begin{bmatrix} F_{T,x} \\ F_{T,y} \\ F_{T,xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_i \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_i (h_i - h_{i-1}) \quad ; \quad \begin{bmatrix} M_{T,x} \\ M_{T,y} \\ M_{T,xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_i \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)^{1/2} \quad (445)$$

onde a construção da matriz constitutiva em coordenadas globais, $\bar{\mathbf{Q}}$, é mostrada na Equação (266). As alturas superior e inferior da i -ésima lâmina são denotadas por h_i e h_{i-1} , respectivamente. O vetor com os coeficientes de expansão térmica α em coordenadas globais é obtido a partir da matriz de rotação $\mathbf{T}$, mostrada na Equação (265):

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy}/2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (446)$$

Pode-se então definir a relação entre $\mathbf{K}$, o vetor das cargas e o vetor das deformações dos três graus de liberdade envolvidos (translação em x , expansão radial e rotação em torno de x):

$$\begin{bmatrix} F_x \\ P_i - P_o \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\pi R_m F_{T,x} \\ F_{T,y}/R_m \\ 2\pi R_m (R_m F_{T,xy} + M_{T,xy}) \end{bmatrix} \Delta T = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \rho \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (447)$$

Este vetor de deformações pode ser facilmente traduzido no vetor de deformações globais do sistema de coordenadas cartesiano, utilizado anteriormente na Seção 9.2:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \rho / R_m \\ -R_m \varphi \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho / R_m^2 \\ -\varphi \end{bmatrix} \quad (448)$$

em seguida aplica-se a Equação (372) e aplica-se o mesmo procedimento descrito na Seção 8.2 para o cálculo das deformações locais, tensões globais e tensões locais.

A variação nos raios internos e externos é calculada multiplicando a deformação circunferencial pelos raios internos e externos, respectivamente.

Os resultados são visualizados abaixo da tabela com as propriedades da seção (ver Figura 11.2). Na primeira tabela é reportado apenas o índice de falha (IF) máximo, juntamente com a lâmina onde ele ocorreu e o coeficiente de segurança. Como no exemplo abaixo foi utilizado o critério da Máxima Tensão, que prevê três modos de falha distintos, três linhas (uma linha para cada módulo) são inseridas. Abaixo são mostradas as tensões na parte superior e inferior de cada lâmina. Essas tabelas não são exibidas por padrão, bastando clicar nos botões “Mostrar/Esconder tensões” ou “Mostrar/Esconder deformações” para que sejam exibidas.

Coefficiente de segurança	Índice de falha	Número da lâmina	Comentário
18.918	0.053	3	Falha em tração longitudinal
0.657	1.521	3	Falha em tração transversal
0.991	1.009	3	Cisalhamento

Mostrar/Esconder tensões

Mostrar/Esconder deformações

Tensões locais				
Lâmina	Parte	σ_1 [Pa]	σ_2 [Pa]	τ_{12} [Pa]
1	inferior	7.230e+07	4.595e+07	-2.032e+07
1	superior	7.227e+07	4.585e+07	-2.037e+07
2	inferior	3.461e+05	2.778e+07	-3.156e+06
2	superior	-1.168e+06	2.773e+07	-3.262e+06
3	inferior	7.400e+07	2.738e+07	1.614e+07
3	superior	6.988e+07	2.737e+07	1.613e+07

Tensões globais				
Lâmina	Parte	σ_x [Pa]	σ_y [Pa]	τ_{xy} [Pa]
1	inferior	7.230e+07	4.595e+07	-2.032e+07
1	superior	7.227e+07	4.585e+07	-2.037e+07
2	inferior	9.937e+06	1.819e+07	-1.346e+07
2	superior	8.882e+06	1.768e+07	-1.415e+07
3	inferior	2.505e+07	7.633e+07	1.212e+07
3	superior	2.403e+07	7.322e+07	1.034e+07

Figura 11.2 – Tabela contendo o valor máximo do IF para cada modo de falha, juntamente com a lâmina onde ele ocorreu, seguida das tablas de tensões locais e globais.

Por fim, a visualização das tensões e deformações é apresentada na forma de gráficos com relação à coordenada radial, como mostrado na Figura 11.3. Basta clicar em um dos símbolos na legenda para remover ou reexibir algum dos componentes e atualizar a escala do gráfico.



Figura 11.3 – Gráfico das deformações locais ao longo da coordenada radial da estrutura.

11.3 Paredes espessas

Para as paredes espessas é utilizada a teoria estrutural de cascas introduzida por Reissner-Mindlin. O equacionamento para o caso particular de cilindros laminados foi feito por Fronk et. al. [83]. Nessa parte são utilizadas as formas tridimensionais da matriz constitutiva, como descrito na Seção 8.1. Devido à maior complexidade da teoria, (o artigo em questão possui mais de 100 equações) o equacionamento proposto pelos autores não será reproduzido aqui.

De forma simplificada, o mesmo procedimento realizado em paredes finas é seguido, onde o grau de liberdade de deformação radial é adicionado ao sistema. Com isso, as tabelas de tensões e deformações passam a contar com um termo a mais, como pode ser visto na Figura 11.4. Para os critérios de falha que utilizam o valor da resistência na direção 3 é assumido que $(\sigma_3^T)_{ult} = (\sigma_2^T)_{ult}$ e $(\sigma_3^C)_{ult} = (\sigma_2^C)_{ult}$.

Tensões globais					
Lâmina	Parte	σ_x [Pa]	σ_θ [Pa]	σ_r [Pa]	$\gamma_{x\theta}$ [Pa]
1	inferior	7.275e+07	4.625e+07	-1.000e+06	-2.017e+07
1	superior	7.275e+07	4.613e+07	-8.823e+05	-2.022e+07
2	inferior	1.199e+07	1.889e+07	-8.823e+05	-1.200e+07
2	superior	1.076e+07	1.826e+07	-7.618e+05	-1.283e+07
3	inferior	2.576e+07	7.891e+07	-7.618e+05	1.379e+07
3	superior	2.472e+07	7.480e+07	-2.794e-08	1.135e+07

Gráficos



Figura 11.4 – Tabela e gráfico de tensões globais para o caso de paredes espessas.

12.Referências

- [1] F. L. Matthews e R. D. Rawlings, Composite Materials: Engineering and Science, 1ª ed., Woodhead Publishing, 1999.
- [2] A. K. Kaw, Mechanics of Composite Materials, 2ª ed., New York: Taylor & Francis Group, 2006.
- [3] C. C. Chamis, “Mechanics of composite materials: past, present and future,” *21st Annual Meeting of the Society for Engineering Science*, pp. 1-41, 1984.
- [4] P. A. Lagace, Composite Materials: Fatigue and Fracture, 2ª ed., ASTM, 1989.
- [5] I. M. Daniel e O. Ishai, Engineering Mechanics of Composite Materials, 2ª ed., New York: Oxford University Press, 2006.
- [6] E. J. Barbero, Introduction to Composite Material Design, 1ª ed., New York: Taylor & Francis, 1999.
- [7] E. J. Barbero, Introduction to Composite Material Design, 2ª ed., CRC Press, 2010.
- [8] S. W. Tsai e H. T. Hahn, Introduction to Composite Materials, Lancaster: Technomic Publishing, 1980.
- [9] G. Eckold, Design and Manufacture of Composite Structures, 1ª ed., Cambridge: Woodhead Publishing, 1994.
- [10] C. C. Chamis, “Simplified Composite Micromechanics Equations for Hygral, Thermal and Mechanical Properties,” *NASA Technical Memorandum*, pp. 1-19, 1983.
- [11] R. Pal, Electromagnetic, Mechanical, and Transport Properties of Composite Materials, New York: CRC Press, 2015.
- [12] J. C. Halpin e J. L. Kardos, “The Halpin-Tsai equations: A review article,” *Polymer Engineering and Science*, vol. 16, pp. 344-352, 1976.
- [13] H. L. Cox, “The elasticity and strength of paper and other fibrous materials,” *British Journal of Applied Physics*, vol. 3, nº 3, pp. 72-79, 1951.
- [14] S. K. De e J. R. White, Short fibre-polymer composites, Cambridge: Woodhead, 1996.
- [15] K. K. Chawla, Composite Materials, New York: Springer, 2012.
- [16] E. G. Wolff, Introduction to the Dimensional Stability of Composite Materials, Lancaster: Destech Publications, 2004.
- [17] R. M. Christensen e F. M. Waals, “Effective Stiffness of Randomly Oriented Fibre Composites,” *Journal of Composite Materials*, vol. 6, pp. 518-535, 1972.

- [18] M. Manera, "Elastic Properties of Randomly Oriented Short Fiber-Glass Composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 11, pp. 235-247, 1977.
- [19] N. Pan, "The elastic constants of randomly oriented fiber composites: A new approach to prediction," *Science and Engineering of Composite Materials*, vol. 5, nº 2, pp. 63-72, 1996.
- [20] H. Yu, M. L. Longana, M. Jalalvand, M. R. Wisnom e K. D. Potter, "Pseudo-ductility in intermingled carbon/glass hybrid composites with highly aligned discontinuous fibres," *Composites: Part A*, nº 73, pp. 35-44, 2015.
- [21] S. Banerjee e B. V. Sankar, "Mechanical properties of hybrid composites using finite element method micromechanics," *Composites: Part B*, vol. 58, pp. 318-327, 2014.
- [22] C. C. Chamis e J. H. Sinclair, "Mechanics of Intraply Hybrid Composites - Properties, Analysis and Design," *Polymer Composites*, vol. 1, nº 1, pp. 7-13, 1980.
- [23] T. Chou, *Microstructural design of fiber composites*, New York: Cambridge University Press, 1992.
- [24] A. Shahzad e R. S. Choudhry, "Design and Manufacturing of Natural Fiber/Synthetic Fiber Reinforced Polymer Hybrid Composites," em *Handbook of Composites from Renewable Materials*, Hoboken, Wiley, 2017, pp. 411-448.
- [25] J. Avenston e A. Kelly, "Tensile first cracking strain and strength of hybrid composites and laminates," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 294, pp. 519-534, 1980.
- [26] J. Henry e S. Pimenta, "Modelling hybrid effects on the stiffness of aligned discontinuous composites with hybrid fibre-types," *Composites Science and Technology*, vol. 152, pp. 275-289, 2017.
- [27] M. W. Hyer, *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*, Boston: McGraw Hill, 1998.
- [28] S. Ahmed e F. R. Jones, "A review of particulate reinforcement theories for polymer composites," *Journal of Materials Science*, vol. 25, pp. 4933-4942, 1990.
- [29] S. K. Mital, "Micromechanics for Particulate Reinforced Composites," *NASA Technical Memorandum*, vol. 107276, pp. 1-17, 1996.
- [30] E. H. Kerner, "The Elastic and Thermo-elastic Properties of Composite Media," *Proceedings of the Physical Society*, vol. 68, pp. 808-813, 1956.
- [31] A. Einstein, *Investigation on Theory of Brownian Motion*, New York: Dover, English translation, 1956.
- [32] M. Mooney, "The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles," *Journal of Colloid Science*, vol. 6, nº 2, pp. 162-170, 1951.
- [33] E. Guth, "Theory of Filler Reinforcement," *Journal of Applied Physics*, vol. 16, nº 20, pp. 20-25, 1945.

- [34] U. J. Counto, "The effect of the elastic modulus of the aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete," *Magazine of Concrete Research*, vol. 16, nº 48, pp. 129-138, 1964.
- [35] J. G. Brodnyan, "The Concentration Dependence of the Newtonian Viscosity of Prolate Ellipsoids," *Transactions of the Society of Rheology*, vol. 3, pp. 61-68, 1959.
- [36] S. Fu, X. Feng, B. Lauke e Y. May, "Effects of particle size, particle/matrix interface adhesion and particle loading on mechanical properties of particulate-polymer composites," *Composites: Part B*, vol. 38, pp. 933-961, 2008.
- [37] Z. Hashin e S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [38] T. S. Chow, "Review - The effect of particle shape on the mechanical properties of filled polymers," *Journal of Materials Science*, vol. 15, pp. 1873-1888, 1980.
- [39] B. Paul, "Prediction of Elastic Constants of Multiphase Materials," *Transactions of The Metallurgical Society of AIME*, vol. 218, pp. 36-41, 1960.
- [40] O. Ishai e L. J. Cohen, "Elastic Properties of Filled and Porous Epoxy Composites," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 9, pp. 539-546, 1967.
- [41] L. E. Nielsen, "Simple Theory of Stress-Strain Properties of Filled Polymers," *Journal of Applied Polymer and Science*, vol. 10, pp. 97-103, 1966.
- [42] D. A. Brune e J. Bicerano, "Micromechanics of nanocomposites: comparison of tensile and compressive elastic moduli, and prediction of effects of incomplete exfoliation and imperfect alignment on modulus," *Polymer*, vol. 43, pp. 369-387, 2002.
- [43] H. Miygawa, M. J. Rich e L. T. Drzal, "Amine-Cured Epoxy/Clay Nanocomposites. II. The Effect of the Nanoclay Aspect Ratio," *Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics*, vol. 42, pp. 4391-4400, 2004.
- [44] N. Dayma e B. K. Satapathy, "Morphological interpretations and micromechanical properties of polyamide-6/polypropylene-grafted-maleic anhydride/nanoclay ternary nanocomposites," *Materials and Design*, vol. 31, pp. 4693-4703, 2010.
- [45] A. Dorigato, Y. Dzenis e A. Pegoretti, "Filler aggregation as a reinforcement mechanism in polymer nanocomposites," *Mechanics of Materials*, vol. 61, pp. 79-90, 2013.
- [46] L. Százdi, B. P. Jr, G. J. Vancso e B. Pukánsky, "Quantitative estimation of the reinforcing effect of layered silicates in PP nanocomposites," *Polymer*, vol. 47, pp. 4638-4648, 2006.

- [47] R. G. Villoria e A. Miravete, "Mechanical model to evaluate the effect of the dispersion," *Acta Materialia*, vol. 55, pp. 3025-3031, 2007.
- [48] B. Arash, Q. Wang e V. K. Varadan, "Mechanical properties of carbon nanotube/polymer composites," *Scientific Reports*, vol. 4, nº 6479, pp. 1-8, 2014.
- [49] L. Sun e e. al., "Mechanical properties of surface-functionalized SWCNT/epoxy composites," *Carbon*, vol. 46, pp. 320-328, 2008.
- [50] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, 2nd Ed., Philadelphia: Taylor and Francis, 1999.
- [51] P. P. Camanho, "Failure criteria for fibre-reinforced polymer composites," *Seção de mecânica aplicada*, 2002.
- [52] V. D. Azzi e S. W. Tsai, "Anisotropic Strength of Composites," *Experimental Mechanics*, vol. 5, pp. 283-288, 1965.
- [53] H. T. Hahn e S. W. Tsai, "Nonlinear Elastic Behavior of Unidirectional Composite Laminae," *Journal of Composite Materials*, vol. 7, nº 102, pp. 102-118, 1973.
- [54] F.-K. Chang e K.-Y. Chang, "A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations," *Journal of Composite Materials*, vol. 21, pp. 834-855, 1987.
- [55] M. Meo, A. J. Morris, R. Vignjevic e G. Marengo, "Numerical simulations of low-velocity impact on an aircraft sandwich panel," *Composite Structures*, vol. 62, pp. 353-360, 2003.
- [56] C. G. Dávilla, P. P. Camanho e C. A. Rose, "Failure Criteria for FRP Laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 39, nº 4, p. 323=345, 2005.
- [57] R. M. Christensen, "Completion and Closure of Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composite Materials," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 81, pp. 1-6, 2014.
- [58] R. G. Cuntze, "Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design," *Composites Science and Technology*, vol. 66, pp. 1081-1096, 2006.
- [59] E. Petersen e R. G. Cuntze, "Experimental determination of material parameters in Cuntze's Failure-Mode-Concept-based UD strength failure conditions," *Composites Science and Technology*, vol. 134, pp. 12-25, 2016.
- [60] Z. Hashin, "Analysis of composite materials - A survey," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, nº 3, pp. 481-505, 1983.
- [61] A. Puck e H. Schürmann, "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models," *Composites Science and Technology*, vol. 58, pp. 1045-1067, 1998.

- [62] O. Hoffman, "The Brittle Strength of Orthotropic Materials," *Journal of Composite Materials*, vol. 1, nº 2, pp. 200-206, 1967.
- [63] I. M. Daniel, B. T. Werner e J. S. Fenner, "Strain-rate-dependent failure criteria for composites," *Composites Science and Technology*, vol. 71, nº 3, pp. 357-364, 2011.
- [64] S. T. Pinho, L. Iannucci e P. Robinson, "Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking: Part I: Development," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 37, nº 1, pp. 63-73, 2006.
- [65] S. T. Pinho, L. Iannucci e P. Robinson, "Physically based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking. Part II: FE implementation," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 37, nº 5, pp. 766-777, 2006.
- [66] C. T. Sun, "Strength Analysis of Unidirectional Composites and Laminates," *Comprehensive Composite Materials*, pp. 641-666, 2000.
- [67] V. Tita, J. Carvalho e D. Vandepitte, "Failure analysis of low velocity impact on thin composite laminates: Experimental and numerical approaches," *Composite Structures*, vol. 83, pp. 413-428, 2008.
- [68] S. W. Tsai, "Strength Characteristics of Composite Materials," *NASA Contractor Report*, vol. 7215, 1965.
- [69] S. W. Tsai e J. D. D. Melo, "A unit circle failure criterion for carbon fiber reinforced polymer composites," *Composites Science and Technology*, vol. 123, pp. 71-78, 2016.
- [70] S. W. Tsai e E. M. Wu, "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials," *Journal of Composite Materials*, vol. 5, pp. 58-80, 1971.
- [71] StructX, "Structural Engineering Resources," 2020. [Online]. Available: <https://structx.com/home.html>. [Acesso em 2020].
- [72] efunda, "Engineering Fundamentals," 2020. [Online]. Available: <https://www.efunda.com/home.cfm>. [Acesso em 2020].
- [73] J. C. Pereira, "Curso de mecânica dos sólidos," *Universidade Federal de Santa Catarina - GRANTE*, nº 1, pp. 1-165, 2003.
- [74] D. Gay, S. V. Hoa e S. W. Tsai, *Composite Materials: Design and Applications*, Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [75] L. J. Gibson e M. F. Ashby, *Cellular Solids - Structure and properties*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [76] ANSI/AISC, "Specification for structural steel building," *American Institute of Steel Construction*, vol. 360, nº 16, pp. 1-676, 2016.
- [77] D. Zenkert, *An Introduction to Sandwich Structures*, Stockholm: KTH, 1995.

- [78] H. G. Allen, Analysis and Design of Structural Sandwich Panels, Pergamon Press: Oxford, 1969.
- [79] N. J. Hoff e S. E. Mautner, "Buckling of Sandwich Type Panels," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 12, nº 3, pp. 285-297, 1945.
- [80] F. J. Plantema, Sandwich Construction, New York: John Wiley & Sons, 1966.
- [81] C. Norris, W. Ericksen, H. March, C. Smith e K. Boller, "Wrinkling of the Facings of Sandwich Constructions Subjected to Edgewise Compression," *U. S. Forest Product Laboratory Report*, vol. 1810, 1949.
- [82] S. Li, M. S. Johnson, E. Sitnikova, R. Evans e P. J. Mistry, "Laminated beams/shafts of annular cross-section subject to combined," *Thin-Walled Structures*, vol. 182, pp. 1-13, 2023.
- [83] T. H. Fronk, S. L. Folkman e E. Clark, "Simple Analytical Techniques for Laminated Cylinders and Plates," em *Proceedings of the International SAMPE Technical Conference*, Wichita, 2009.
- [84] S. Fu, B. Lauke e Y. May, Science and engineering of short fibre reinforced polymer composites, Boston: CRC Press, 2009.
- [85] S. Fu e B. Lauke, "The elastic modulus of misaligned short-fiber-reinforced polymers," *Composites Sciences and Technology*, vol. 58, pp. 389-400, 1998.